

نام  
نام خانوادگی  
محل امضاء

عصر جمعه  
۹۳/۱۱/۱۷



جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.  
امام خمینی (ره)

## آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۴

مجموعه آمار - کد ۱۲۰۷

مدت پاسخگویی: ۲۷۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۳۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبرخطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۴۵	۳۱	۷۵
۳	دروس تخصصی (احتمال، آمار ریاضی، نمونه‌گیری و رگرسیون)	۶۰	۷۶	۱۳۵

این آزمون نمره منفی دارد.  
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

بهمن ماه - سال ۱۳۹۳

حق چاپ، نشر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.





- 14- 1) 70 percent of  
3) 70 percent  
15- 1) in  
2) for  
3) over  
4) with  
2) a percentage of 70  
4) 70 of the percentage

### PART C: Reading Comprehension

**Directions:** Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4) and then mark the correct choice on your answer sheet.

#### PASSAGE 1:

In probability theory, the expected value of a random variable is intuitively the long-run average value of repetitions of the experiments it represents. Less roughly, the law of large numbers guarantees that the arithmetic mean of the values almost surely converges to the expected value as the number of repetitions goes to infinity. More practically, the expected value of a discrete random variable is the probability weighted average of all possible values. In other words, each possible value a random variable can assume is multiplied by its probability of occurring, and the resulting products are summed to obtain the expected value. The same works for continuous random variable, except the sum is replaced by an integral and the probabilities by probability densities. For distributions which are neither discrete nor continuous, the expected value of a random variable is the integral of the random variable with respect to its probability measure.

- 16- **The expected value of a discrete random variable is the -----.**  
 1) arithmetic mean  
 2) average  
 3) integral of random variable  
 4) sum of the production of random variable values by its probability
- 17- **Which kind of convergence is considered for the law of large numbers?**  
 1) Arithmetic mean  
 2) Almost surely convergence  
 3) Convergence in mean  
 4) Expected value
- 18- **For a probability density, the expected value of the related random variable is the -----.**  
 1) probability-weighted average  
 2) integral of random variable with respect to the probability measure  
 3) average of all possible values  
 4) continuous random variable
- 19- **Based on the law of large numbers the ----- converges to the expected value.**  
 1) harmonic mean  
 2) median  
 3) arithmetic mean  
 4) geometric mean
- 20- **The expected value for distributions which are neither discrete nor continuous is -----.**  
 1) integral of random variable with respect to its probability measure  
 2) sum of probabilities produce by its values  
 3) integral of the random variable multiplied by probability measure  
 4) a measure



**PASSAGE 2:**

We define sample mean  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  and sample variance  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ , where  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  comprises a random sample from some population. It is well known that  $\bar{X}$  and  $S^2$  are independent if the population is normally distributed. Now, naturally we can ask a question: Are  $\bar{X}$  and  $S^2$  independent without the assumption of normality? The answer to this question is "No" according to the following theorem found in Lukacs (1942).

*Theorem: If the variance (or second moment) of a population distribution exists, then a necessary and sufficient condition for the normality of the population distribution is that  $\bar{X}$  and  $S^2$  are mutually independent.*

*Remark: That the normality is a necessary condition for the independence between  $\bar{X}$  and  $S^2$  was first proved by Geary (1936) using a mathematical tool provided by R. A. Fisher, but the proof in Lukacs (1942) is easier to understand.*

**21- What comprises a random sample?**

- |                               |                      |
|-------------------------------|----------------------|
| 1) $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ | 2) Normal population |
| 3) Sample mean                | 4) Sample variance   |

**22-  $\bar{X}$  and  $S^2$  are independent -----.**

- |                    |                             |
|--------------------|-----------------------------|
| 1) all the time    | 2) under uniform assumption |
| 3) if uncorrelated | 4) under normal assumption  |

**23- Who first proved the theorem?**

- |           |           |          |            |
|-----------|-----------|----------|------------|
| 1) Fisher | 2) Lukacs | 3) Geary | 4) Pearson |
|-----------|-----------|----------|------------|

**24- Whose proof is easier?**

- |             |            |            |              |
|-------------|------------|------------|--------------|
| 1) Fisher's | 2) Geary's | 3) Lukacs' | 4) Pearson's |
|-------------|------------|------------|--------------|

**25- A condition for the theorem is the existence of the -----.**

- |             |         |                 |                  |
|-------------|---------|-----------------|------------------|
| 1) variance | 2) mean | 3) third moment | 4) fourth moment |
|-------------|---------|-----------------|------------------|

**PASSAGE 3:**

Most departments of statistics teach at least one course on the difficult concepts of convergence in probability ( $P$ ), almost sure convergence ( $a.s.$ ), convergence in law ( $L$ ), and convergence in  $r$ th mean ( $r$ ) at the graduate level (see Sethuraman 1995). Indeed, as pointed out by Boyce et al. (2001), "statistical theory is an important part of the curriculum, and is particularly important for students headed for graduate school." Such knowledge is prescribed by learned statistics societies (e.g., the Accreditation of Statisticians by the Statistical Society of Canada and Curriculum Guidelines for Undergraduate Programs in Statistical Science by the American Statistical Association). The main textbooks (e.g., Chung, 1974; Billingsley, 1986; Ferguson, 1996; Lehmann, 2001; Serfling 2002) devote about 15 pages to defining these convergence concepts and their interrelations. Very often, these concepts are provided as definitions, and students are exposed only to some basic properties and to the universal implications.

**26- Where do they teach the concepts of convergence?**

- |                                 |                 |
|---------------------------------|-----------------|
| 1) In departments of statistics | 2) In colleges  |
| 3) In high schools              | 4) In societies |

**27- How many concepts of convergence do they teach?**

- |        |          |        |         |
|--------|----------|--------|---------|
| 1) One | 2) three | 3) Two | 4) four |
|--------|----------|--------|---------|

- 28- At what level are the complicated concepts of convergence taught?  
 1) PhD                      2) Graduate                      3) Undergraduate                      4) High school
- 29- How many textbooks devoted to convergence are mentioned in the passage?  
 1) One                      2) Two                      3) Three                      4) Five
- 30- How are the concepts often provided?  
 1) As definitions                      2) As theorems  
 3) As examples                      4) As homework

دروس پایه:

ریاضیات عمومی

۳۱- انحنای منحنی  $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \cosh t\vec{j}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{\cosh t}$   
 (۲)  $\frac{t}{\cosh^2 t}$   
 (۳)  $\frac{1}{\cosh 2t}$   
 (۴)  $\frac{1}{\cosh^2 t}$

۳۲- اگر  $T$  مکعبی در  $\frac{1}{8}$  اول فضا باشد که رئوس آن  $(0,0,0)$  و  $(1,0,0)$  و  $(0,1,0)$  و  $(0,0,1)$  هستند، مقدار

انتگرال  $\iiint_T e^{x+y+z} dv$  کدام است؟

- (۱)  $(e-1)^3$   
 (۲)  $e^3 - 1$   
 (۳)  $e^3 + 1$   
 (۴)  $(e+1)^3$

۳۳- مقدار مشتق پنجم  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$  در  $x=0$  کدام است؟

- (۱) ۱۲۰  
 (۲) -۱۲۰  
 (۳) -۱  
 (۴) ۱

۳۴- سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^{n-1}}$  ...

(۱) واگرا است.

(۲) همگراست و مجموع آن  $1 + \frac{49}{36}$  است.

(۳) همگراست و مجموع آن  $\frac{7}{6}$  است.

(۴) همگراست و مجموع آن  $\frac{49}{36}$  است.

۳۵- مجموعه نقاط  $z$  در صفحه مختلط که  $0 < |z| + 2 < |z|^2 - 3|z|$  کدام است؟

(۱)  $\{x+iy \mid 2 < x^2 + y^2 < 4\}$

(۲)  $\{x+iy \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

(۳)  $\{x+iy \mid 1 < x^2 + y^2 < 3\}$

(۴)  $\{x+iy \mid 1 < x^2 + y^2 < 5\}$

۳۶- مقدار انتگرال معین  $\int_0^{\ln 2} e^x \ln(e^{-x} + 1) dx$  کدام است؟

(۱)  $\ln\left(\frac{4}{27}\right)$

(۲)  $\ln\left(\frac{27}{4}\right)$

(۳)  $\ln\left(\frac{27}{16}\right)$

(۴)  $\ln\left(\frac{9}{4}\right)$

۳۷-  $f$  تابعی دو بار مشتق پذیر بوده که به ازای  $a \neq 0$ ,

$$\int_0^a (f'(x) + x f''(x)) dx = a$$

مقدار  $f'(a)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}a$

(۲)  $0$

(۳)  $1$

(۴)  $a$



۳۸- ماکسیمم مقدار  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$  روی خط  $x + y = 3$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{13}$   
 (۲)  $\frac{13}{2}$   
 (۳)  $\frac{9}{2}$   
 (۴)  $\frac{2}{9}$

۳۹- مقدار انتگرال  $\iint_A xe^{x^2 - y^2} dy dx$  که در آن  $A$  ناحیه محدود به خطوط  $y = x$ ،  $y = x - 1$ ،  $y = 1$  و  $y = 0$  باشد، کدام است؟

$y = 0$  باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{4}$   
 (۲)  $\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e - \frac{1}{2}$   
 (۳)  $\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e - \frac{1}{4}$   
 (۴)  $\frac{1}{4}\pi^2 - \frac{1}{2}$

مبانی علوم ریاضی

۴۰- فرض کنیم  $g: Y \rightarrow Z$  تابعی دوسویی و  $f: X \rightarrow Y$  تابع باشد و  $h = g \circ f: X \rightarrow Z$  کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

- (۱) اگر  $f$  یک به یک باشد آنگاه  $h$  تابع دوسویی است.  
 (۲) اگر  $f$  یک به یک نباشد آنگاه  $h$  یک به یک نیست.  
 (۳) اگر  $f$  یک به یک باشد آنگاه  $h$  یک به یک است.  
 (۴) اگر  $f$  پوشا باشد آنگاه  $h$  هم پوشا است.

۴۱- اگر  $A - B = \{x: x \in A \text{ \& } x \notin B\}$  آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

- (۱)  $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$   
 (۲)  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$   
 (۳)  $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$   
 (۴)  $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

۴۲- کدام گزینه درست است؟

$$(1) \bigcap_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} \right) = \{0\}$$

$$(2) \bigcap_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) = \{1\}$$

$$(3) \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right) = [0, 2]$$

$$(4) \bigcup_{n=2}^{\infty} \left( -\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right) = \left( -\frac{1}{2}, 1 \right)$$

۴۳- فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  یک تابع باشد،  $A, B \subseteq X$  و  $C \subseteq Y$ . اگر  $A \setminus B$  به مفهوم مکمل  $B$  نسبت به  $A$

باشد، کدام گزینه نادرست است؟

$$(1) f(f^{-1}(C)) = f(X) \cap C$$

$$(2) f(A \cap f^{-1}(C)) = f(A) \cap C$$

$$(3) f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$$

$$(4) f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$$

۴۴- فرض کنید  $a, b \in \mathbb{R}$  و  $m, n \in \mathbb{N}$  در این صورت:

$$(1) \text{ اگر } a < b \text{ آنگاه } a^n < b^n$$

$$(2) \text{ شرط لازم و کافی برای آنکه } a < b \text{ آنست که } a^r < b^r$$

$$(3) \text{ با فرض } a \neq 0, m < n \text{ و تنها اگر } a^m < a^n$$

$$(4) \text{ اگر } a^n < b^n \text{ آنگاه } a < b$$

۴۵- فرض کنیم  $\aleph_0 = \text{card}(\mathbb{N})$  عدد اصلی مجموعه اعداد طبیعی  $\mathbb{N}$  باشد. کدام گزینه نادرست است؟

$$(1) \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$(2) \aleph_0 = \text{card}([0, 1])$$

$$(3) \text{ به ازای هر } n \in \mathbb{N}, \mathbb{R} \text{ و } \mathbb{R}^n \text{ هم عدد (هم ارز) هستند.}$$

$$(4) \text{ به ازای هر } n \in \mathbb{N}, \aleph_0^n = \aleph_0$$



مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

۴۶- فرض کنیم  $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ . کدام یک از زیرفضاهای  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  روی میدان  $\mathbb{C}$ ، تحت  $A$  پایا هستند ( $\mathbb{C}$  میدان اعداد مختلط است)؟

(۱)  $\langle (1+i, 2) \rangle$

(۲)  $\langle (1+i, 1-i) \rangle$

(۳)  $\langle (2, 2+i) \rangle$

(۴)  $\langle (2, 1-2i) \rangle$

۴۷- فرض کنید  $X = [1, 0, a, 1, b]$  ماتریسی  $1 \times 5$  با درایه‌های حقیقی باشد. کدام گزینه در مورد پوچی ماتریس  $X^t X$  صحیح است؟

(۱) پوچی برابر ۴ است.

(۲) پوچی برابر ۳ است.

(۳) اگر  $a = b = 0$ ، پوچی برابر ۲ است.

(۴) اگر  $a = b = 1$ ، پوچی برابر ۱ است.

۴۸- فرض کنید  $\mathbb{C}$  میدان اعداد مختلط باشد و فضای برداری  $V = \mathbb{C}^4$  را روی  $\mathbb{C}$  در نظر بگیرید. فرض کنید

$W = W_1 + W_2$  که  $W_1 = \langle (1, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, -1) \rangle$ ،  $W_2 = \langle (0, 1, 2, -1), (i, 0, 1, 1) \rangle$ ،  $W_1, W_2$  زیر

فضاهای  $V$  باشند. در این صورت بعد  $W$  به عنوان یک فضای برداری روی  $\mathbb{R}$  کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۸

۴۹- فرض کنید  $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  و  $T: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  یک نگاشت خطی با ضابطه

$T(A) = XA - AX$  باشد. کدام گزینه درباره‌ی بعد هسته  $T$  صحیح است؟

(۱)  $\dim \ker T = 0$

(۲)  $\dim \ker T = 1$

(۳)  $\dim \ker T = 2$

(۴)  $\dim \ker T = 3$

۵۰- فرض کنید ماتریس  $A \in M_{10}(\mathbb{R})$  و  $A^2 = A + 2I$  و رتبه‌ی ماتریس  $A + I$  برابر ۳ باشد. در این صورت

$\text{tr}(A)$  برابر است با:

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۲

۵۱- فرض کنید  $\mathbb{Q}$  میدان اعداد گویا است و  $A^{\wedge} = I, A \in M_r(\mathbb{Q})$ . کدام گزینه صحیح است؟

- (۱)  $A^{\vee} = I$   
 (۲)  $A^{\dagger} = I$   
 (۳)  $A^{\ddagger} = I$   
 (۴)  $A^{\ddagger} = -I$

مبانی آنالیز ریاضی

۵۲- هرگاه  $\{a_n\}$  دنباله‌ای از اعداد مثبت و  $\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱)  $\limsup a_n \leq \limsup \sigma_n$

(۲)  $\liminf a_n \leq \liminf \sigma_n$

(۳)  $\liminf \sigma_n \leq \liminf a_n$

(۴) اگر دنباله  $\{\sigma_n\}$  همگرا باشد آنگاه دنباله  $\{a_n\}$  همگرا است.

۵۳- تابع  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \notin \mathbb{Q} \\ m \sin \frac{1}{n} & x \in \mathbb{Q}, x = \frac{m}{n}, (m, n) = 1 \end{cases}$$

تعریف می‌شود. کدام گزینه درست است؟

(۱)  $f$  بر  $[0, 1]$  پیوسته است.

(۲)  $f$  در هر نقطه از بازه  $[0, 1]$  حد دارد.

(۳) تعداد نقاط پیوستگی  $f$  در  $[0, 1]$  شمارا است.

(۴) ناپیوستگی‌های  $f$  در صورت وجود از نوع دوم است.

۵۴- کدام تابع بر  $(0, \infty)$  یکنواخت پیوسته است؟

(۱)  $x^{\ddagger}$

(۲)  $x \sin x$

(۳)  $x \sin \frac{1}{x}$

(۴)  $\sin \frac{1}{x}$

۵۵- فرض کنیم  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی کراندار باشد و تابع  $g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $g(x) = \inf_{a \leq t \leq x} f(t)$  تعریف

شود. در این صورت:

(۱) تابع  $g$  یکنواخت پیوسته است.

(۲) تابع  $g$  پیوسته است اما لزوماً یکنواخت پیوسته نیست.

(۳) اگر تابع  $f$  یکنواخت پیوسته باشد آنگاه تابع  $g$  نیز یکنواخت پیوسته است.

(۴) اگر تابع  $f$  یکنواخت پیوسته باشد آنگاه تابع  $g$  پیوسته است اما لزوماً یکنواخت پیوسته نیست.



۵۶- فرض کنیم تابع غیر ثابت  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  مشتق پذیر باشد،  $f$  و  $f'$  صفر مشترک نداشته باشند و مجموعه صفرهای  $f'$  ناتهی باشد. در این صورت مجموعه صفرهای تابع  $f$ :

- (۱) تهی است.
- (۲) ناشمارا است.
- (۳) متناهی است.
- (۴) شمارای نامتناهی است.

۵۷- فرض کنیم تابع  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  مشتق پذیر باشد و  $f'(a) < f'(b)$ . کدام گزینه درست است؟

- (۱) مجموعه  $f'([a, b])$  فشرده است.
- (۲) مجموعه  $f'([a, b])$  یک بازه است.
- (۳) مجموعه  $f'([a, b])$  کراندار است.
- (۴) مجموعه  $\{x \in [a, b] : f'(a) \leq f'(x) \leq f'(b)\}$  یک بازه است.

۵۸- فرض کنیم  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته باشد. تساوی  $f(0) = 0$  از کدام گزینه نتیجه می‌شود؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x+n) dx = 0 \quad (۱)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) dx = 0 \quad (۲)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (f(x))^n dx = 0 \quad (۳)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx = 0 \quad (۴)$$

۵۹- فرض کنیم  $A = \{x > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{x} - 1) \text{ همگرا است}\}$ . در این صورت:

- (۱)  $A = \{1\}$
- (۲)  $A = (0, \infty)$
- (۳)  $A = (0, 1]$
- (۴)  $A = \left(\frac{1}{e}, e\right)$

۶۰- فرض کنیم  $\{a_n\}$  دنباله‌ای در  $\mathbb{R}$  باشد و  $a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}$ ,  $a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$ . کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرا باشد، آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ a_n^-$  همگرا است.

(۲) اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  همگرا باشند، آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرای مطلق است.

(۳) اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرای مشروط باشد، آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  همگرا هستند.

(۴) اگر  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  همگرای مشروط باشد، آنگاه  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  واگرا هستند.

۶۱- فرض کنیم  $A, B$  دو زیر مجموعه در  $\mathbb{R}^n$  باشند و  $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$  در این صورت:

(۱) اگر  $A - B$  همبند باشد حداقل یکی از  $A$  و  $B$  همبند است.

(۲) اگر  $A$  و  $B$  همبند باشند آنگاه  $A - B$  همبند است.

(۳) اگر  $A$  و  $B$  بسته باشند آنگاه  $A - B$  بسته است.

(۴) اگر  $A$  فشرده و  $B$  بسته باشد آنگاه  $A - B$  فشرده است.

۶۲- فرض کنیم  $E$  و  $F$  دو زیر مجموعه ناتهی در  $\mathbb{R}$  باشند. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر  $(x, y) \in (E \times F)^\circ$  آنگاه  $x \in E^\circ$  و  $y \in F^\circ$ .

(۲) اگر  $(x, y) \in (E \times F)'$  آنگاه  $x \in E'$  و  $y \in F'$ .

(۳) اگر  $(E \times F)' \neq \emptyset$  آنگاه  $E' \neq \emptyset$  و  $F' \neq \emptyset$ .

(۴) اگر  $E^\circ \cup F^\circ \neq \emptyset$  آنگاه  $(E \times F)^\circ \neq \emptyset$ .

۶۳- حداقل شرایط روی زیر مجموعه  $E$  از  $\mathbb{R}$  که گزاره زیر راست باشد کدام است؟

برای هر دنباله نزولی و تودرتوی  $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$  از زیر مجموعه‌های فشرده  $\mathbb{R}$ ، اگر  $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_n \subseteq E$  آنگاه یک  $n$

وجود دارد که  $K_n \subseteq E$ .

(۱)  $E$  بسته و لزوماً کراندار است.

(۲)  $E$  بسته و نه لزوماً کراندار است.

(۳)  $E$  باز و لزوماً کراندار است.

(۴)  $E$  باز و نه لزوماً کراندار است.



مبانی آنالیز عددی

۶۴- در یک دستگاه ممیز شناور نرمال شده برای اعداد حقیقی با روش بریدن برای ارقام غیر قابل نمایش در مبنا ۲، هر عدد  $x \neq 0$  به صورت  $\pm(0.d_1d_2d_3d_4d_5d_6)_2 \times 2^{\pm d_7}$  نمایش داده می‌شود که  $1 \leq d_i \leq 2$ ،  $0 \leq d_7 \leq 2$ ،  $i = 1, \dots, 6$ ، فاصله بین عدد ۷ و کوچک‌ترین عدد قابل نمایش بزرگ‌تر از ۷ چقدر است؟

(۱)  $\frac{1}{9}$

(۲)  $\frac{1}{7}$

(۳)  $\frac{1}{6}$

(۴)  $\frac{1}{3}$

۶۵- در رابطه زیر گزینه صحیح برای نقطه چین کدام است؟

$$\frac{f(x + \frac{h}{2}) - 2f(x) + f(x - \frac{h}{2}))}{\frac{h^2}{2}} + o(h^2) = \dots$$

(۱)  $f'(x)$

(۲)  $f''(x+h)$

(۳)  $f''(x)$

(۴)  $f'(x+h)$

۶۶- فرض کنید روش نیوتن برای حل مساله  $\max(\sin x \cos x - 1)$  به یک عدد مثبت  $x^*$  همگرا شده است. نرخ همگرایی مجانبی برابر کدام است؟

(۱) یک

(۲) دو

(۳) خطی

(۴) زبرخطی

۶۷- مقدار  $d$ ، تخمین مشتق تابع  $y(x) = \sqrt{x}$  در نقطه  $\bar{x} = 1,05$  با  $d = \frac{y_1 - y_2}{0,05}$  که در آن،  $y_1 = \sqrt{1,05}$  و

$y_2 = 1$ ، خطای برشی متناسب با ..... دارد.

(۱)  $0,0001$

(۲)  $0,001$

(۳)  $0,015$

(۴)  $0,1$

۶۸- فرمول انتگرال گیری عددی  $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx \approx w_1 f(0) + w_2 f'(0) + w_3 f(1)$  برای چند جمله‌ای‌های تا

درجه‌ی ۲ دقیق است. تقریب این فرمول برای  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{4}$

(۲)  $\frac{7}{12}$

(۳)  $\frac{11}{12}$

(۴)  $\frac{5}{6}$

۶۹- تخمین  $y(0.1)$  برای جواب معادله دیفرانسیل به صورت  $y(0) = 1$ ،  $y'(x) = e^{x^3}$  با استفاده از سری تیلور مرتبه ۳ (تا مشتق سوم) به ازای یک قدم  $h = 0.1$  برابر کدام است؟

(۱)  $1/13$

(۲)  $1/11$

(۳)  $1/1$

(۴)  $1/1$

مبانی احتمال

۷۰- داده‌های آماری با یک رقم اعشار با نمودار ساقه و برگ (تنه و شاخه) زیر داده شده است.

۷	۱	۲	۳	۳	۶	۷	۸
۸	۲	۳	۴	۴	۵	۶	۶
۹	۲	۲	۳	۳			

داده‌های کم‌تر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف می‌کنیم میانگین داده‌های باقیمانده کدام است؟

(۱)  $8/11$

(۲)  $8/16$

(۳)  $8/2$

(۴)  $8/34$

۷۱- فرض کنید  $H$ ،  $G$  و  $\bar{x}$  به ترتیب نمایانگر میانگین‌های همساز (هارمونیک، توافقی)، هندسی و حسابی نمونه باشند. با فرض  $x_i = ar^{i-1}$ ،  $i = 1, \dots, n$  که در آن  $r > 0$  و  $a > 0$ ، کدام رابطه همواره درست است؟

(۱)  $G^2 = \bar{x} \times H$

(۲)  $\bar{x}^2 = G \times H$

(۳)  $G = \frac{\bar{x} + H}{2}$

(۴)  $H^2 = \bar{x} \times G$



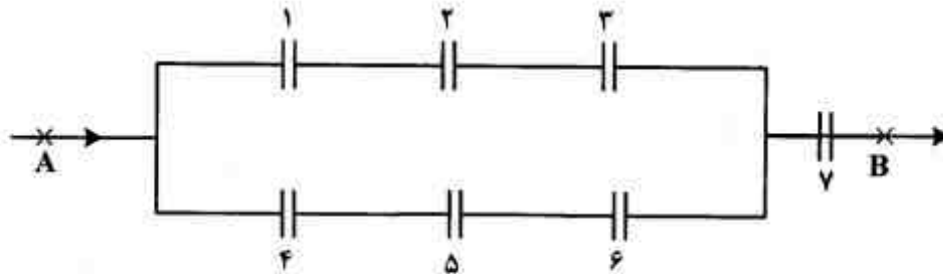
۷۲- در یک شرکت میانگین حقوق ماهیانه کارکنان مرد ۱,۲۰۰,۰۰۰ تومان، میانگین حقوق کارکنان زن ۷۰۰,۰۰۰ تومان و میانگین حقوق کلیه کارکنان ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان است، چند درصد کارکنان زن هستند؟

- (۱) ۳۰٪  
(۲) ۴۰٪  
(۳) ۵۰٪  
(۴) ۶۰٪

۷۳- سه جعبه با برچسب‌های ۱۰، ۲۵ و ۵۰ تومان مشخص شده‌اند، به چند طریق می‌توان این سه جعبه را با سکه‌های مناسب فوق پر کرد تا ارزش مجموع سه جعبه ۲۰۰۰ تومان باشد؟

- (۱) ۷۰۳  
(۲) ۷۱۶  
(۳) ۸۲۰  
(۴) ۸۶۱

۷۴- در شکل زیر فرض کنید احتمال این که هر کدام از ۷ رله‌ی شبکه ارتباطی نشان داده شده درست کار کنند برابر  $p$  است. در صورتیکه رله‌ها مستقل از یکدیگر کار کنند، احتمال این که بتوان بین دو نقطه A و B ارتباط برقرار کرد کدام است؟



- (۱)  $p^7(2-p^3)$   
(۲)  $p^3(2-p^3)$   
(۳)  $p^4(1-p^3)$   
(۴)  $p^3(1-p^3)$

۷۵- فردی سه سکه در جیب دارد که یکی سالم و دو تای دیگر هر دو طرف شیر هستند. اگر این فرد یک سکه به تصادف از جیب خود خارج و ۲ بار پرتاب کند و هر دو بار شیر مشاهده شود، احتمال اینکه سکه سالم انتخاب شده باشد کدام است؟

- (۱)  $\frac{8}{9}$   
(۲)  $\frac{4}{5}$   
(۳)  $\frac{1}{5}$   
(۴)  $\frac{1}{9}$

دروس تخصصی (احتمال، آمار ریاضی، نمونه گیری و رگرسیون (۱):

سطح زیر منحنی نرمال استاندارد										
z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0.1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0.2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0.3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0.4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0.5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0.6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0.7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0.8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0.9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1.0	8413	8438	8461	8484	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1.1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1.2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1.3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1.4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1.5	9333	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1.6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9523	9533	9543
1.7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1.8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9700	9706
1.9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9762	9767
2.0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2.1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2.2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2.3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9915
2.4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2.5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2.6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2.7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2.8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9978	9979	9980	9981
2.9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3.0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9990	9990	9990
3.1	9990	9991	9991	9992	9992	9993	9993	9993	9993	9993
3.2	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9994	9994	9994	9994
3.3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996
3.4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997

مقادیر بحرانی توزیع t					
df	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.078	6.314	12.71	31.82	63.66
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.132	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.110	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.100	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.705	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756

مقادیر بحرانی توزیع مربع کای									
df	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.850	0.800	0.750	0.700
1	4E-5	0.0001	0.0009	0.0039	0.0081	0.0135	0.0191	0.0244	0.0296
2	0.010	0.0201	0.0506	0.1025	0.2107	0.3007	0.3745	0.4457	0.5193
3	0.071	0.1418	0.2138	0.3518	0.5844	0.7814	0.9348	1.0798	1.2191
4	0.206	0.2971	0.4844	0.7107	1.0645	1.3858	1.6759	1.9292	2.1458
5	0.411	0.5543	0.8312	1.1454	1.6759	2.0783	2.3659	2.6244	2.8453
6	0.675	0.8720	1.2375	1.6353	2.2027	2.6718	3.0043	3.2470	3.4528
7	0.989	1.3190	1.6898	2.1673	2.7326	3.2351	3.5651	3.7784	3.9565
8	1.374	1.8079	2.1797	2.7003	3.3251	3.7454	4.0731	4.2565	4.4013
9	1.735	2.2582	2.6582	3.2469	3.7963	4.1918	4.4973	4.6509	4.7793
10	2.155	2.6582	3.0469	3.6943	4.1675	4.5015	4.8187	4.9503	5.0591
11	2.603	3.0534	3.4017	4.0478	4.5748	4.8117	5.1274	5.2408	5.3345
12	3.073	3.5705	3.8517	4.4017	4.9226	5.1274	5.4346	5.5311	5.6101
13	3.565	4.1060	4.3027	4.7598	5.2260	5.4346	5.7396	5.8222	5.8901
14	4.074	4.6604	4.7527	5.1091	5.5253	5.7396	6.0430	6.1196	6.1765
15	4.600	5.2293	5.2077	5.4598	5.8112	6.0430	6.3469	6.4176	6.4645
16	5.142	5.8122	5.6977	5.8076	6.2821	6.3469	6.6454	6.7099	6.7465
17	5.697	6.4077	6.2077	6.2516	6.7564	6.7564	6.9396	7.0000	7.0265
18	6.264	7.0140	6.7277	6.7016	7.2361	7.2361	7.3996	7.4559	7.4771
19	6.843	7.6327	7.2965	7.2516	7.7261	7.7261	7.8796	7.9311	7.9471
20	7.433	8.2634	7.8833	7.8383	8.2261	8.2261	8.3696	8.4161	8.4271
21	8.033	8.9064	8.4802	8.4352	8.7361	8.7361	8.8696	8.9111	8.9171
22	8.642	9.5624	9.1241	9.0791	9.2561	9.2561	9.3796	9.4161	9.4171
23	9.260	10.2304	9.7780	9.7330	9.7861	9.7861	9.8996	9.9311	9.9311
24	9.888	10.9104	10.4560	10.4110	10.3061	10.3061	10.4096	10.4361	10.4361
25	10.52	11.5924	11.1400	11.0950	10.9811	10.9811	11.0746	11.0961	11.0961
26	11.16	12.2764	11.7840	11.7390	11.6161	11.6161	11.6996	11.7161	11.7161
27	11.80	12.9624	12.4720	12.4270	12.2521	12.2521	12.3261	12.3371	12.3371
28	12.44	13.6504	13.1580	13.1130	12.9361	12.9361	13.0006	13.0061	13.0061
29	13.12	14.3404	13.8460	13.8010	13.6201	13.6201	13.6746	13.6751	13.6751
30	13.78	14.951	14.4540	14.4090	14.2041	14.2041	14.2586	14.2591	14.2591

۷۶- اگر تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه با تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی آن برابر باشد، تعداد کل زیر مجموعه‌های آن کدام است؟

(۱) ۶۴

(۲) ۱۲۸

(۳) ۲۵۶

(۴) ۵۱۲

۷۷- مقدار  $\sum_{i=0}^{20} i \binom{20}{i}$  کدام است؟

(۱)  $2^{20}$

(۲)  $2^{21}$

(۳)  $5 \times 2^{20}$

(۴)  $5 \times 2^{21}$

۷۸- اگر  $X_1$  و  $X_2$  به ترتیب تعداد خال‌های ظاهر شده در پرتاب مستقل دو تاس سالم باشند، احتمال اینکه  $X_1$  کمتر از  $X_2$  باشد کدام است؟

(۱)  $\frac{4}{12}$

(۲)  $\frac{5}{12}$

(۳)  $\frac{6}{12}$

(۴)  $\frac{7}{12}$

۷۹- دو نقطه به تصادف و مستقل از یکدیگر در فاصله  $[0, 1]$  انتخاب می‌شود. اگر  $D$  فاصله بین این دو نقطه باشد، مقدار  $P(D \leq 0.1)$  کدام است؟

(۱) ۰/۱۸

(۲) ۰/۱۹

(۳) ۰/۸۱

(۴) ۰/۹۱



۸۰- اگر متغیر تصادفی پیوسته  $X$  دارای تابع توزیع زیر باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ k(x-1)^4 & 1 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

(۱)  $\frac{1}{16}$

(۲)  $\frac{1}{8}$

(۳)  $\frac{1}{4}$

(۴) ۱

۸۱- اگر  $Y_1, \dots, Y_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال لگاریتمی (LN) (لاگ نرمال) با میانگین صفر و واریانس ۱

باشد، توزیع متغیر تصادفی  $X = \prod_{i=1}^n Y_i^\alpha$  که در آن  $\alpha > 0$ ، کدام است؟

(۱)  $N(0, n\alpha)$

(۲)  $N(0, n\alpha^2)$

(۳)  $LN(0, n\alpha)$

(۴)  $LN(0, n\alpha^2)$

۸۲- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع پواسن با میانگین ۱ باشد. اگر  $T = \bar{X}(n - \bar{X})$ ، کران

بالا برای  $P(T = 0)$  کدام است؟

(۴)  $2e^{-2n}$

(۳)  $2e^{-n}$

(۲)  $e^{-2n}$

(۱)  $e^{-n}$

۸۳- فرض کنید برای متغیرهای تصادفی هم توزیع  $X_1, \dots, X_n$  داشته باشیم:

$$(X_i, X_j) = (X_1, X_2) \quad ; \quad \forall i \neq j, \quad \sum_{i=1}^n X_i = 0$$

ضریب همبستگی  $X_1$  و  $X_2$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{n-1}$

(۲)  $-\frac{1}{n}$

(۳)  $\frac{1}{n}$

(۴)  $\frac{2}{n(n-1)}$

۸۴- اگر  $Z \sim N(0, 1)$ ، مقدار  $\text{Var}(Z | |Z|)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) ۳

(۴) ۴

۸۵- فرض کنید  $X_1, X_2, X_3, X_4$  متغیرهای تصادفی iid از توزیع برنولی با پارامتر  $p$  باشند، قرار دهید

مقدار  $E[X_1 | X = 2]$  کدام است؟  $X = \sum_{i=1}^4 X_i$

(۱)  $0.25$

(۲)  $\frac{1}{3}$

(۳)  $0.5$

(۴) ۱

۸۶- فرض کنید  $X \sim U(0, 3)$  و  $Y = \begin{cases} 3 & X < 1 \\ 3X & X \geq 1 \end{cases}$ ، مقدار  $E(Y)$  کدام است؟

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳)  $\frac{9}{2}$

(۴) ۵

۸۷- فرض کنید  $X \sim N(0, 1)$ ،  $P(T = 1) = P(T = -1) = \frac{1}{2}$  و متغیرهای تصادفی  $X$  و  $T$  از یکدیگر مستقل

باشند، توزیع  $Y = XT$  کدام است؟

(۱)  $N(0, \frac{1}{4})$

(۲)  $N(0, 1)$

(۳)  $\text{bin}(2, \frac{1}{4})$

(۴)  $\text{bin}(2, \frac{1}{2})$

۸۸- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال  $f(x) = 2x, 0 < x < 1$  باشد.

قرار دهید  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ . اگر  $\frac{\sqrt{n}(Y_n - a)}{b} \xrightarrow{d} N(0, 1)$  مقادیر  $a$  و  $b$  کدام است؟

(۱)  $a = \frac{1}{2}, b = \sqrt{\frac{1}{12}}$

(۲)  $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$

(۳)  $a = \frac{1}{4}, b = \sqrt{\frac{1}{12}}$

(۴)  $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$

۸۹- برای یک نمونه تصادفی ۳ تایی از توزیع یکنواخت روی فاصله  $(0, 1)$ ، احتمال اینکه میانه نمونه بین  $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$  باشد کدام است؟

باشد کدام است؟

(۱)  $\frac{9}{16}$

(۲)  $\frac{10}{16}$

(۳)  $\frac{11}{16}$

(۴)  $\frac{12}{16}$

۹۰- ده دوچرخه سوار در یک مسابقه شرکت دارند. هر دوچرخه سوار مسابقه را در مدت زمان  $T$  (ساعت) با تابع چگالی احتمال زیر به پایان می‌رساند، احتمال اینکه دوچرخه سواری با کمتر از نیم ساعت برنده مسابقه شود، کدام است؟

$f_T(t) = te^{-t}, t > 0$

(۱)  $1 - \left(\frac{3}{2}e^{-0.5}\right)^{10}$

(۲)  $1 - \left(\frac{1}{2}e^{-0.5}\right)^{10}$

(۳)  $\left(\frac{3}{2}e^{-0.5}\right)^{10}$

(۴)  $\left(\frac{1}{2}e^{-0.5}\right)^{10}$



۹۱- متغیر تصادفی  $X$  دارای تابع مولد گشتاوری به صورت زیر است. تابع احتمال این متغیر کدام است؟

$$M_X(t) = \frac{1}{2} \left[ 2 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \right]$$

$$P(X=k) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}; k=0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$P(X=k) = \frac{e^{-1}}{k!}; k=0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$P(X=k) = \frac{1}{4} \text{ if } k=1, -1, 2, -2, \dots \quad (3)$$

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{if } k=1, -1 \\ \frac{1}{2} & \text{if } k=0 \end{cases} \quad (4)$$

۹۲- اگر متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع  $N(1,1)$  باشد، مقدار  $\text{Var}(e^X)$  کدام است؟

$$e^{-1} \quad (1)$$

$$e(e-1) \quad (2)$$

$$e^2(e-1) \quad (3)$$

$$e^2(e-1) \quad (4)$$

۹۳- تعداد زمین لرزه‌ها در یک منطقه از توزیع پواسن با نرخ  $\lambda$  زمین لرزه در سال پیروی می‌کند. در صورتیکه

بدانیم دقیقاً دو زمین لرزه در یک سال رخ داده، احتمال اینکه هر دو زمین لرزه در سه ماهه اول سال رخ

داده باشد کدام است؟ (برای سادگی همه ماه‌ها را سی روزه و هر سال را ۱۲ ماه یعنی ۳۶۰ روز در نظر

بگیرید.)

$$\frac{1}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{12} \quad (2)$$

$$\frac{64}{225} \quad (3)$$

$$4e^{-4} \quad (4)$$

۹۴- فرض کنید  $X$  به شرط  $Y = y$  دارای توزیع یکنواخت در بازه  $(0, y)$  و توزیع  $Y$ ، گاما با پارامتر شکل  $\alpha$  و پارامتر مقیاس  $\beta$  باشد. واریانس  $X$  کدام است؟

$$\frac{\alpha\beta^2}{12} \quad (1)$$

$$\frac{\alpha\beta^2(\alpha+4)}{12} \quad (2)$$

$$\frac{\alpha\beta(1+\beta)}{12} \quad (3)$$

$$\frac{\alpha\beta^2(1+4\beta)}{12} \quad (4)$$

۹۵- اگر  $X_1, X_2, \dots$  دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل از هم با توزیع یکسان  $U(0, 1)$  باشند. توزیع حدی  $Y_n = n X_{(1)}$  کدام است؟

$$\text{Exp}\left(\frac{1}{4}\right) \quad (1)$$

$$\text{Exp}\left(\frac{1}{2}\right) \quad (2)$$

$$\text{Exp}(1) \quad (3)$$

$$\text{Exp}(2) \quad (4)$$

۹۶- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  و  $Y_1, \dots, Y_n$  دو نمونه تصادفی مستقل از توزیع‌های به ترتیب  $E(\lambda)$  و  $\Gamma(1, \lambda)$  باشند. آماره بسنده می‌نیمال کدام است؟

$$(Y - \Gamma(\alpha, \lambda) \rightarrow f_{\alpha, \lambda}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad X - E(\lambda) \rightarrow f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0; \text{راهنمایی:})$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i^{-1} \quad (1)$$

$$\prod_{i=1}^n X_i \cdot Y_i^{-1} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n (X_i + Y_i^{-1}) \quad (3)$$

$$\prod_{i=1}^n (X_i + Y_i^{-1}) \quad (4)$$

۹۷- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $B(1, \theta)$  باشد. کدامیک از آماره‌های زیر بسنده هستند؟

$$(i) (X_1, \dots, X_n), \quad (ii) (X_1^2, \dots, X_n^2), \quad (iii) \left( \sum_{i=1}^k X_i, \sum_{i=k+1}^n X_i \right)$$

$$(iv) \sum_{i=1}^n X_i, \quad (v) \bar{X}, \quad (vi) \sum_{i=1}^n X_i^2, \quad (vii) \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^2$$

۱) فقط آماره‌های (i) - (v) برای  $\theta$  بسنده هستند.

۲) فقط آماره‌های (i) - (vi) برای  $\theta$  بسنده هستند.

۳) کلیه آماره‌ها به جز (vi) برای  $\theta$  بسنده هستند.

۴) کلیه آماره‌ها برای  $\theta$  بسنده هستند.

۹۸- فرض کنید  $X$  دارای تابع چگال احتمال زیر باشد،

$$f(x) = c f_1(x) f_2^2(x), \quad x = 0, 1, \dots, m$$

که در آن  $f_1(x)$  تابع احتمال توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای  $(m, \theta)$  و  $f_2(x)$  تابع احتمال توزیع هندسی با پارامتر  $\theta$  می‌باشند. بر اساس یک نمونه تصادفی  $X_1, \dots, X_n$  از  $X$  آماره بسنده برای  $\theta$  کدام است؟

$$\sum_{i=1}^n X_i \quad (1)$$

$$\prod_{i=1}^n X_i \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \binom{m}{X_i} \quad (3)$$

$$\prod_{i=1}^n \binom{m}{X_i} \quad (4)$$

۹۹- تعداد  $k$  سکه سالم را ۱۰ بار مستقل از هم پرتاب می‌کنیم. اگر تعداد شیرها در ۱۰ پرتاب به صورت زیر باشد، برآورد گشتاوری  $k$  کدام است؟

۷, ۸, ۸, ۴, ۳, ۱۰, ۸, ۶, ۷, ۹

۲۰ (۱)

۱۴ (۲)

۱۰ (۳)

۷ (۴)



۱۰۰- اگر  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآوردگر ماکزیمم درست‌نمایی (MLE) پارامتر  $p$  کدام است؟

$$f(x, p) = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1-p & x = -1 \end{cases}$$

(۱)  $\frac{\bar{X}}{2}$

(۲)  $\bar{X}$

(۳)  $\frac{\bar{X}-1}{2}$

(۴)  $\frac{\bar{X}+1}{2}$

۱۰۱- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع هندسی با تابع احتمال زیر باشد. اگر

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i u(X_i - 2)$$

برآوردگر ناریب کدام است؟

$$f_{\theta}(x) = \theta(1-\theta)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots, 0 < \theta < 1$$

(۱)  $\frac{1-\theta}{\theta}$

(۲)  $\theta - \frac{1}{\theta}$

(۳)  $\frac{1-\theta}{\theta}$

(۴)  $\frac{\theta}{1-\theta}$

۱۰۲- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع  $N(0, \theta)$  باشد. برآوردگر ناریب با کمترین واریانس (UMVUE) پارامتر  $\theta^k$  کدام است؟

(۱)  $\Gamma(k+n) \left( \sum X_i^2 \right)^k$

(۲)  $\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left( \sum X_i^2 \right)^k}{\Gamma\left(k + \frac{n}{2}\right) 2^k}$

(۳)  $\sum_i X_i^{2k}$

(۴)  $\left( \sum_i X_i^2 \right)^k$

۱۰۳- اگر  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه‌ی تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{\theta x^{\theta-1}}{(1+x)^{\theta+1}} & x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

برآوردگر UMVU پارامتر  $\frac{1}{\theta}$  کدام است؟

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i}{X_i+1} \right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{X_i} \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{X_i} \right) \quad (3)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{X_i}{1+X_i} \right) \quad (4)$$

۱۰۴- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع  $N(\theta, 1)$  باشد. پارامتر UMVUE پارامتر  $\gamma(\theta) = P_{\theta}(X_1 + X_2 \leq a)$  که در آن  $a$  مقدار ثابت و معلوم است، کدام است؟  $\Phi$  نمایانگر تابع توزیع نرمال استاندارد است.

$$\Phi \left( \sqrt{\frac{\gamma n}{n-\gamma}} \left( \frac{a}{\gamma} - \bar{X} \right) \right) \quad (1)$$

$$\Phi \left( \sqrt{\frac{n}{n-1}} (a - \bar{X}) \right) \quad (2)$$

$$\Phi \left( \sqrt{\frac{\gamma n}{n-\gamma}} (a - \bar{X}) \right) \quad (3)$$

$$\Phi \left( \sqrt{\frac{n}{n-1}} (\gamma a - \bar{X}) \right) \quad (4)$$

۱۰۵- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه‌ی تصادفی  $n$  تایی از توزیع  $N(\mu, 1)$  باشد. کران پائین کرامر - رانو برای واریانس برآوردگر ناریب  $P(X_1 > 2\mu)$ ، کدام است؟

(۱)  $e^{-\mu}$

(۲)  $\frac{e^{-\mu}}{n}$

(۳)  $\frac{\mu^2}{2\pi n}$

(۴)  $\frac{e^{-\mu^2}}{2\pi n}$

۱۰۶- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه‌ی تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد. ضریب اطمینان فاصله‌ی تصادفی  $(\min(X_i), \max(X_i))$  کدام است؟

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|} \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty$$

(۱)  $1 - \frac{1}{2^n}$

(۲)  $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$

(۳)  $1 - \frac{1}{2^{n-2}}$

(۴)  $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

۱۰۷- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه‌ی تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. یک بازه اطمینان  $100(1-\alpha)$  درصدی با دم‌های برابر برای  $\theta$  بر پایه‌ی MLE پارامتر  $\theta$  کدام است؟

$$f(x, \theta) = e^{-x+\theta}, \quad x > \theta$$

(۱)  $\bar{X} - 1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$

(۲)  $X_{(1)} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$

(۳)  $\left( X_{(1)} + \frac{1}{n} \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right), X_{(1)} + \frac{1}{n} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right)$

(۴)  $\left( \bar{X} - \frac{1}{\sqrt{n}} X_{\frac{\alpha}{2}}^2(n), \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{n}} X_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n) \right)$



۱۰۸- متغیر تصادفی  $X$  در فاصله  $(0, 1)$  دارای تابع توزیع احتمال  $F(x) = x^6$  یا  $G(x) = x^3$  است. بر اساس یک مشاهده، پرتوانترین آزمون برای  $H_0: X \sim F$  در برابر  $H_1: X \sim G$  را در نظر می‌گیریم. رابطه میان احتمال خطای نوع اول  $(\alpha)$  و توان آزمون  $(\pi)$  کدام است؟

$$\pi = \alpha^2 \quad (1)$$

$$\alpha = \pi^2 \quad (2)$$

$$1 - \alpha = (1 - \pi)^2 \quad (3)$$

$$\alpha = (1 - \pi)^2 \quad (4)$$

۱۰۹- فرض کنید  $X$  دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \theta & x = -1 \\ (1 - \theta)^2 \theta^x & x = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

برای انجام آزمون  $H_0: \theta = \frac{1}{4}$  در مقابل  $H_1: \theta = \frac{3}{4}$ ، پرتوان‌ترین آزمون اندازه  $\alpha = \frac{1}{32}$  کدام است؟

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 4 \\ \frac{1}{16} & x = -1 \\ 0 & 0 \leq x < 4 \end{cases} \quad (1)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 4 \\ 0 & x < 4 \end{cases} \quad (2)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 5 \\ \frac{1}{32} & x = -1 \\ 0 & 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad (3)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 5 \\ \frac{1}{64} & x = -1 \\ 0 & 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \quad (4)$$

۱۱۰- فرض کنید  $X_1$  و  $X_2$  متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع چگالی احتمال زیر باشند،

$$f_{\theta}(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1$$

ناحیه رد آزمون پرتوان (MP) برای آزمون  $H_0: \theta = 1$  در مقابل  $H_1: \theta = 2$  در سطح  $\alpha = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$  کدام است؟

$$X_1 X_2 > \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$X_1 + X_2 > \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$X_1 X_2 < \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$X_1 + X_2 < \frac{1}{2} \quad (4)$$

۱۱۱- اگر  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع یکنواخت در بازه  $(0, \theta)$  باشد،  $\theta > 0$ ، تابع توان پرتوان‌ترین آزمون یکنواخت (UMP) برای آزمون  $H_0: \theta \leq 1$  در برابر  $H_1: \theta > 1$  کدام است؟

$$\frac{1-\alpha}{\theta^n} \quad (1)$$

$$1 - \frac{1-\alpha}{\theta^n} \quad (2)$$

$$1 - \frac{\alpha}{\theta^n} \quad (3)$$

$$1 - \left(\frac{1-\alpha}{\theta}\right)^n \quad (4)$$

۱۱۲- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی و مستقل از توزیع  $U(-\theta, \theta)$  باشد. برای آزمون  $H_0: \theta = 1$  در مقابل  $H_1: \theta > 1$  ناحیه ردی به شکل  $\max |X_i| > c$  در نظر گرفته شده است. مقدار  $c$  و تابع توان آزمون،

$\beta^*(\theta)$  برای سطح  $\alpha$  کدام است؟

$$c = \sqrt[n]{1-\alpha}, \quad \beta^*(\theta) = 1 - \frac{1-\alpha}{\theta^n} \quad (1)$$

$$c = \sqrt[n]{\alpha}, \quad \beta^*(\theta) = \theta^{-n}\alpha \quad (2)$$

$$c = 2\sqrt[n]{\alpha}, \quad \beta^*(\theta) = 1 - \frac{1-\alpha}{(2\theta)^n} \quad (3)$$

$$c = 2\sqrt[n]{1-\alpha}, \quad \beta^*(\theta) = 1 - \frac{1-\alpha}{\theta^n} \quad (4)$$

۱۱۳- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $E(\theta, 1)$  با تابع چگالی احتمال زیر باشد، برای آزمون

$H_0: \theta \leq 2$  در مقابل  $H_1: \theta > 2$  در سطح  $\alpha = e^{-2}$ ، ناحیه رد آزمون UMP کدام است؟

$$f_{\theta}(x) = e^{-(x-\theta)}; x \geq \theta$$

$$X_{(1)} > 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (1)$$

$$X_{(1)} > 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (2)$$

$$X_{(1)} > 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (3)$$

$$X_{(1)} > 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (4)$$

۱۱۴- فرض کنید  $X$  تک مشاهده‌ای از خانواده‌های توزیع‌های زیر باشد. هم‌چنین فرض کنید  $\Theta_0 = \{\theta_1, \theta_2\}$

باشد، برای آزمون فرض  $H_0: \theta \in \Theta_0$  در مقابل  $H_1: \theta \notin \Theta_0$  و در سطح  $\alpha = 0.05$ ، آزمون نسبت

درست‌نمایی تعمیم یافته کدام است؟

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$\theta_1$	۰/۰۵	۰/۱۵	۰/۸
$\theta_2$	۰/۸	۰/۱	۰/۱
$\theta_3$	۰/۷	۰/۲۵	۰/۰۵

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = x_1, x_2 \\ 0 & x = x_3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{16} & x = x_2 \\ 0 & x \neq x_2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x = x_1 \\ 0 & x \neq x_1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = x_2 \\ 0 & x \neq x_2 \end{cases} \quad (4)$$



۱۱۵- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع  $E(\mu, \sigma)$  با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برای آزمون فرض  $H_0: \mu = 2$  در مقابل  $H_1: \mu \neq 2$  آماره آزمون نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته و توزیع آن تحت  $H_0$  کدام است؟

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-(x-\mu)/\sigma}; \quad x \geq \mu$$

$$F_{\tau, \tau n} \text{ و دارای توزیع } \frac{n(X_{(1)} - \tau)}{\sum_{i=1}^n (X_i - \tau)} \quad (1)$$

$$F_{\tau, \tau n - \tau} \text{ و دارای توزیع } \frac{n(X_{(1)} - \tau)}{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})} \quad (2)$$

$$F_{\tau, \tau n - \tau} \text{ و دارای توزیع } \frac{n(n-1)(X_{(1)} - \tau)}{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})} \quad (3)$$

$$F_{\tau n, \tau} \text{ و دارای توزیع } \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})}{n(n-1)(X_{(1)} - \tau)} \quad (4)$$

۱۱۶- یک نمونه تصادفی ساده (بدون جای‌گذاری) اولیه به حجم  $n$  را در نظر بگیرید. اگر بدانیم که با دو برابر کردن حجم نمونه واریانس برآوردگر میانگین جامعه ۲ برابر می‌شود، کسر نمونه‌گیری اولیه کدام است؟

$$\frac{1}{6} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

۱۱۷- در یک نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری به حجم  $n$  از جامعه‌ای به حجم  $N$ ، احتمال انتخاب شدن دو عضو اول و دوم جامعه در نمونه کدام است؟

$$(1) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{N} \right)^n \right]^2$$

$$(2) 1 - \left( 1 - \frac{1}{N} \right)^{2n}$$

$$(3) 1 - \left( 1 - \frac{2}{N} \right)^n$$

$$(4) 1 - 2 \left( 1 - \frac{1}{N} \right)^n + \left( 1 - \frac{2}{N} \right)^n$$

۱۱۸- از جامعه‌ای به حجم ۱۰۰۰ نمونه‌ای به حجم ۱۰ به روش تصادفی ساده با جای‌گذاری گرفته‌ایم، اگر میانگین نمونه‌ای برابر حجم نمونه و مجموع توان دوم واحدهای نمونه،  $2/5$  برابر حجم جامعه باشد، برآورد ناریب واریانس میانگین نمونه‌ای چقدر است؟

$$(1) 16/5$$

$$(2) 16/67$$

$$(3) 15$$

$$(4) 25/67$$

۱۱۹- فرض کنید بدانیم نسبت افراد طرفدار یک کاندید انتخاباتی در سال گذشته ۶۰٪ بوده است. می‌خواهیم با یک تحقیق نمونه‌ای، این نسبت را طوری برآورد کنیم که با ضریب اطمینان ۹۵٪ این نسبت در فاصله اطمینان  $(0/5, 0/7)$  قرار گیرد. با صرف‌نظر کردن از نسبت نمونه‌گیری، تعداد نمونه لازم کدام است؟

$$Z_{0/025} = 2$$

$$(1) 90$$

$$(2) 92$$

$$(3) 95$$

$$(4) 97$$

۱۲۰- در نمونه‌گیری تصادفی ساده (بدون جای‌گذاری) به حجم  $n$  از جامعه‌ای متناهی به حجم  $N$  اگر حداکثر واریانس برآوردگر نسبت جامعه برابر با  $\frac{1}{100}$  باشد، مقدار  $n$  کدام است؟

$$(1) n = \frac{25N}{N+24}$$

$$(2) n = \frac{25N}{N-1}$$

$$(3) n = \frac{24N}{N+25}$$

$$(4) n = \frac{96N}{N+96}$$

۱۲۱- فرض کنید جامعه‌ای به حجم  $N$  موجود است. در یک نمونه‌گیری از دو طبقه مایلیم بجای  $n_1$  و  $n_2$  در تخصیص نیمن داشته باشیم  $n_1 = n_2$ . اگر  $\text{var}(\bar{Y}_{st})$  معرف واریانس در حالت  $n_1 = n_2$  و  $\text{var}_{opt}(\bar{Y}_{st})$  واریانس مربوط به تخصیص نیمن باشد، در صورتیکه  $N$  به اندازه کافی بزرگ و  $n_2 = 3n_1$  آنگاه در مورد

نسبت  $ef = \frac{\text{var}_{opt}(\bar{Y}_{st})}{\text{var}(\bar{Y}_{st})}$  کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $ef = \frac{1}{5}$

(۲)  $ef = \frac{4}{5}$

(۳)  $ef = \frac{2}{5}$

(۴)  $ef = \frac{3}{5}$

۱۲۲- در چه صورت در نمونه‌گیری طبقه‌ای تخصیص متناسب، بهینه است؟

(۱) حجم طبقات برابر باشد.

(۲) تغییرات داخل طبقات کوچک باشد.

(۳) تغییرات داخل طبقات یکسان باشد.

(۴) حجم طبقات متناسب با واریانس طبقات باشد.

۱۲۳- اگر داده‌های حاصل از یک روش نمونه‌گیری طبقه‌ای را بدون در نظر گرفتن طبقه‌ها با یکدیگر ادغام نموده و از میانگین معمولی مشاهدات برای برآورد میانگین جامعه استفاده کنیم، یک شرط کافی برای ناریب بودن این برآوردگر کدام است؟

(۱) حجم نمونه‌ها برابر باشند.

(۲) حجم طبقه‌ها یکسان باشند.

(۳) نسبت حجم نمونه در هر دو طبقه دلخواه ثابت باشد.

(۴) نسبت حجم نمونه به حجم طبقه در تمام طبقات جامعه برابر باشد.

۱۲۴- جامعه‌ای به حجم  $N$  را در نظر بگیرید. فرض کنید کوچکترین و بزرگترین عضو جامعه معلوم و به ترتیب برابر  $y(1)$  و  $y(N)$  باشند. دو برآوردکننده برای برآورد مجموع عناصر جامعه به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$T_1 = N\bar{y}_n \quad \text{و} \quad T_2 = y(1) + y(N) + (N-2)\bar{y}'_n$$

که در آن  $\bar{y}_n$  و  $\bar{y}'_n$  به ترتیب میانگین نمونه‌ای حاصل از انتخاب  $n$  نمونه به روش تصادفی ساده بدون جای-گذاری از کل جامعه و از جامعه بدون عناصر  $y(1)$  و  $y(N)$  است. کدام عبارت صحیح است؟

(۱)  $T_2$  برآوردکننده‌ای اریب است و واریانس آن از واریانس  $T_1$  بیشتر است.

(۲)  $T_2$  برآوردکننده‌ای اریب است و واریانس آن از واریانس  $T_1$  کمتر است.

(۳)  $T_2$  برآوردکننده‌ای ناریب است و واریانس آن از واریانس  $T_1$  کمتر است.

(۴)  $T_2$  برآوردکننده‌ای ناریب است و واریانس آن از واریانس  $T_1$  بیشتر است.

۱۲۵- می‌خواهیم از یک جامعه متناهی به حجم  $N$  یک نمونه تصادفی ساده به حجم  $n$  انتخاب کنیم. اگر در چارچوب این جامعه نام عنصر اول به اشتباه دو بار ثبت شده باشد، اریبی برآوردگر میانگین مشاهدات برای میانگین کل جامعه  $\bar{y}_N$  کدام است؟

(۱)  $y_1$

(۲)  $\frac{y_1}{N+1}$

(۳)  $\frac{\bar{y}_N - y_1}{N}$

(۴)  $\frac{y_1 - \bar{y}_N}{N+1}$

۱۲۶- در یک مدل رگرسیون خطی ساده  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ،  $i = 1, 2, \dots, n$ ،  $\text{var}(Y_i - \hat{Y}_i)$ ، کدام است؟

(۱)  $\text{var}(Y_i)$

(۲)  $\text{var}(Y_i) - \text{var}(\hat{Y}_i)$

(۳)  $\text{var}(Y_i) - 2 \text{var}(\hat{Y}_i)$

(۴)  $\text{var}(Y_i) + \text{var}(\hat{Y}_i)$

۱۲۷- در مدل رگرسیون خطی ساده  $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$  می‌خواهیم فرض  $H_0: \beta_1 = 0$  را در مقابل فرض  $H_1: \beta_1 \neq 0$  آزمون کنیم. بر اساس یک نمونه تصادفی ۱۸ تایی معادله خط رگرسیونی  $y$  روی  $x$  و  $x$  روی  $y$  به ترتیب عبارتند از  $\hat{y} = 0.67 + 1.2x$  و  $\hat{x} = 2.5 + 0.3y$ . مقدار آماره آزمون و درجه آزادی آماره کدام است؟ (فرض نرمال بودن  $\varepsilon$  برقرار است).

(۱)  $t = 3$  با ۱۶ درجه آزادی

(۲)  $t = -3$  با ۱۶ درجه آزادی

(۳)  $F = 3$  با درجه‌های آزادی یک و ۱۶

(۴)  $F = 9$  با درجه‌های آزادی یک و ۱۷

۱۲۸- مدل  $y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^6 \beta_j X_{ij} + \varepsilon_i$ ،  $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$  و  $(i = 1, 2, \dots, n)$  را در نظر بگیرید. اگر  $\hat{\beta}_7 = -3$  با

خطای معیار  $1/5$  بدست آمده باشد، برای آزمون  $H_0: \beta_7 = 0$  مقدار آماره  $F$  کدام است؟

(۱)  $\frac{4}{3}$

(۲)  $\frac{16}{9}$

(۳) ۲

(۴) ۴



۱۲۹- فرض کنید مشاهدات  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  به صورت زیر داده شده است، که در آن پارامترهای مدل و  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$  ها مستقل از هم هستند، برآورد پارامترهای  $(\beta_1, \beta_2)$ ، به روش کمترین توان دوم خطا کدام است؟

$$y_1 = \beta_1 + \beta_2 + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \beta_1 + \varepsilon_2$$

$$y_3 = -\beta_2 + \varepsilon_3$$

$$y_4 = \beta_1 - \beta_2 + \varepsilon_4$$

$$(1) \left( \frac{y_1 + y_2 + y_4}{3}, \frac{y_1 - y_3 - y_4}{3} \right)$$

$$(2) \left( \frac{2y_1 + y_2 - y_3}{4}, \frac{2y_1 - y_3 + y_4}{4} \right)$$

$$(3) \left( \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{4} \right)$$

$$(4) \left( \frac{y_1 + y_2 + y_4}{4}, \frac{y_1 + y_3 + y_4}{3} \right)$$

۱۳۰- در مدل رگرسیون خطی ساده  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ،  $i = 1, \dots, n$ ، براساس برآوردهای روش کمترین توان دوم خطا، اگر ضریب همبستگی نمونه‌ای بین بردارهای  $x = (x_1, \dots, x_n)'$  و  $y = (y_1, \dots, y_n)'$  باشد، ضریب همبستگی نمونه‌ای بین بردارهای  $\hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)'$  و  $y = (y_1, \dots, y_n)'$  برحسب  $r_{x,y}$  کدام است؟

$$(1) r_{x,y}$$

$$(2) r_{x,y}^2$$

$$(3) |r_{x,y}|$$

$$(4) \frac{n}{n-2} r_{x,y}^2$$

۱۳۱- در رگرسیون خطی ساده مدل را براساس  $n$  مشاهده برازش می‌دهیم. اگر مشاهده جدید  $(\bar{x}, \bar{y})$  که در آن  $\bar{x}$  و  $\bar{y}$  میانگین‌های  $n$  مشاهده اول اند به داده‌ها افزوده شود، مقدار آماره  $F$  جدول تحلیل واریانس چقدر افزایش می‌یابد؟

(۱) تغییر نمی‌کند.

$$(2) \frac{R}{\sqrt{1-R^2}}$$

$$(3) \frac{R^2}{1-R^2}$$

$$(4) \frac{(n-1)R^2}{1-R^2}$$

۱۳۲- داده‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$Y: -3 \quad 2 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad 4$$

$$X_1: -2 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 2$$

$$X_2: -2 \quad 2 \quad -2 \quad 2 \quad -2 \quad 2$$

چنانچه مدل خطی  $y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$  که در آن  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$  مناسب باشد، برآورد پارامترهای  $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$  به روش کمترین توان دوم خطا کدام است؟

$$(1) \left( \frac{4}{6}, \frac{10}{16}, 1 \right)$$

$$(2) \left( \frac{3}{2}, -1, \frac{1}{4} \right)$$

$$(3) \left( 2, -2, \frac{1}{2} \right)$$

$$(4) \left( \frac{3}{16}, \frac{7}{24}, 2 \right)$$

۱۳۳- در برازش مدل رگرسیونی  $E(y) = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3$  ،  $SSR = 150$  ،  $MSE = 3$  بدست آمده است. همچنین در برازش مدل  $E(y) = \beta_0 + \beta_1 X$  ،  $SSR = 120$  حاصل شده است. برای آزمون  $H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0$  مقدار آماره‌ی  $F$  کدام است؟

$$(1) 5$$

$$(2) 10$$

$$(3) 14/5$$

$$(4) 28/3$$

۱۳۴- براساس یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی از  $(x, y)$  داریم:

$$r = -0.80, \quad S_{XX} = \sum (X_i - 5)^2 = 16 \quad \text{و} \quad S_{YY} = \sum (Y_i + 2)^2 = 25$$

خط رگرسیون برازش شده به روش کمترین توان دوم خطا کدام است؟

$$(1) \hat{y} = 3 - 1/2x$$

$$(2) \hat{y} = -3 - 0.16x$$

$$(3) \hat{y} = 3 - x$$

$$(4) \hat{y} = -7 - 0.16x$$

۱۳۵- اگر به جای مدل رگرسیون خطی واقعی  $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$ ، مدل  $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$  برازش داده شده باشد و  $\hat{\beta}_1$  برآوردگر پارامتر  $\beta_1$  به روش کمترین توان‌های دوم خطا در مدل برازش داده شده باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $\hat{\beta}_1$  برآوردگر ناریب  $\beta_1$  است.
- (۲)  $\hat{\beta}_1$  برآوردگر ناریب  $\beta_1$  می‌شود اگر  $x_1$  و  $x_2$  ناهمبسته باشند.
- (۳) واریانس  $\hat{\beta}_1$  بیشتر از واریانس برآوردگر کمترین توان‌های دوم خطای  $\beta_1$  براساس مدل واقعی است.
- (۴) اگر  $x_1$  و  $x_2$  ناهمبسته باشند، واریانس  $\hat{\beta}_1$  بیشتر از واریانس برآوردگر کمترین توان‌های دوم خطای  $\beta_1$  براساس مدل واقعی است.