



130F

کد کنترل

130

F

صبح پنجشنبه

۹۷/۲/۶



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۷

آمار - کد (۱۲۰۷)

مدت پاسخگویی: ۲۵۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۲۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۳۵	۳۱	۶۵
۳	دروس تخصصی (احتمال، آمار ریاضی، نمونه‌گیری و رگرسیون ۱)	۶۰	۶۶	۱۲۵

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حل جابجایی و تکرار و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با منتهلین برابر مقررات رفتار می‌شود.

۱۳۹۷

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی در جلسه این آزمون شرکت می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the word or the phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then mark the correct choice on your answer sheet.

- 1- Fierce winds and deadly waves were only one ----- many explorers like Christopher Columbus confronted when sailing to unknown lands.
1) suspension 2) obstacle 3) shortage 4) variation
- 2- In urban desert areas potable water supplies are stressed by increasing demands that leave water managers ----- to find new supplies.
1) discouraging 2) refusing 3) invading 4) struggling
- 3- The sense of smell diminishes with advancing age—much more so than the sensitivity to taste. This ----- may result from an accumulated loss of sensory cells in the nose.
1) decrease 2) merit 3) ambiguity 4) defense
- 4- True, all economic activities have environmental consequences. Nevertheless, the goal of shrimp producers should be to reduce the ----- effects on the environment as much as possible.
1) indigenous 2) competitive 3) deleterious 4) imaginary
- 5- Like most successful politicians, she is pertinacious and single-minded in the ----- of her goals.
1) pursuit 2) discipline 3) permanence 4) involvement
- 6- Knowing that everyone would ----- after graduation, she was worried that she would not see her friends anymore.
1) emerge 2) conflict 3) differentiate 4) diverge
- 7- Certain mental functions slow down with age, but the brain ----- in ways that can keep seniors just as sharp as youngsters.
1) composes 2) conveys 3) compensates 4) corrodes
- 8- It is argued by some that hypnosis is an effective intervention for ----- pain from cancer and other chronic conditions.
1) displacing 2) alleviating 3) exploring 4) hiding
- 9- Children who get ----- atmosphere at home for studies perform better than students who are brought up under tense and indifferent family atmosphere.
1) favorable 2) valid 3) obedient 4) traditional

- 10- The post office has promised to resume first class mail ----- to the area on Friday.
 1) attention 2) progress 3) expression 4) delivery

PART B: Cloze Passage

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Colette began painting while she was still in her youth. (11) ----- 1970, she completed her first performance with *Hommage a Delacroix*, (12) ----- was the beginning of an artistic career (13) ----- to the oneness of art and life. (14) -----, actions and performances on streets and public squares, followed by her "living environments" and the "windows", (15) ----- in a selected pose with an elaborate arrangement of fabrics and lace.

- 11- 1) Since the year 2) During a year of
 3) For a year of 4) In the year
- 12- 1) that it 2) which 3) that 4) it
- 13- 1) devoted 2) was devoted 3) to devote 4) devoting
- 14- 1) Street works then came 2) Then came street works
 3) There coming then street works with 4) With street works then to come
- 15- 1) she remained motionless 2) that in there she remained motionless
 3) in which she remained motionless 4) that in it motionless she remained

PART C: Reading Comprehension:

Directions: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

PASSAGE 1:

Edwin James George Pitman was educated at the University of Melbourne, graduating with B.Sc. and M.A. degrees. He was acting professor of mathematics at the University of New Zealand 1922-1923, then tutor in mathematics and physics at residential colleges of the University of Melbourne 1924-1925. In 1926 he was appointed professor of mathematics at the University of Tasmania, a position he held until his retirement at the end of 1962.

As part of his duties at the University of Tasmania, Pitman was required to offer a course in statistics. He was also consulted by experimentalists of the Tasmanian Department of Agriculture about the analysis of their data. These circumstances led to his studying the then new statistical methods and ideas being developed by R. A. Fisher. As Fisher's ideas were not then widely understood, Pitman set about mastering his work, in particular, *Statistical Methods for Research Workers*.

Pitman became interested in testing hypotheses about means without any accompanying specification of form of population distributions. He examined the non null distribution of the test statistic for what would now be called the permutation test,

first for the test of equality of two means, and then for tests of several means (analysis of variance) and of correlation. The results are given in three papers.

This work on distribution-free methods culminated in the lecture notes developed during a visit to the United States in 1948 and 1949. These notes, produced for the lectures given at the University of North Carolina, were never published but were widely circulated in mimeographed form. They were frequently cited and undoubtedly provided a starting point for much subsequent work in this field.

However, Pitman's first published papers dealt with basic theoretical questions arising from the work of R. A. Fisher. His first paper not only discussed the applicability of the concept of intrinsic accuracy but also established the result that families of distributions admitting a nontrivial sufficient statistic are of exponential type.

- 16- Pitman received his M.A. degree -----.
- | | |
|-------------------------------------|---------------------|
| 1) from the University of Melbourne | 2) from New Zealand |
| 3) in 1922 | 4) in 1923 |
- 17- He offered a course in statistics in -----.
- | | | | |
|--------------|----------------|-------------|-----------|
| 1) Melbourne | 2) New Zealand | 3) Tasmania | 4) London |
|--------------|----------------|-------------|-----------|
- 18- He retired -----.
- | | | | |
|------------|-----------------|-------------------|------------|
| 1) in 1962 | 2) in Melbourne | 3) in New Zealand | 4) in 1960 |
|------------|-----------------|-------------------|------------|
- 19- Pitman became interested in -----.
- | | |
|----------------|---------------------|
| 1) regression | 2) permutation test |
| 3) probability | 4) combinatorics |
- 20- His first paper discussed -----.
- | | |
|-----------------|------------------------|
| 1) independence | 2) complete statistics |
| 3) correlation | 4) exponential family |

PASSAGE 2:

W. S. Gosset entered the service of the Guinness brewery business in Dublin Ireland, in 1899, after obtaining a degree in chemistry at Oxford, with a minor in mathematics. He was asked to investigate what relations existed between the quality of materials such as barley and hops, production conditions, and the finished product. These practical problems led him to seek exact error probabilities of statistics from small samples, a hitherto unresearched area. His firm, which would later require him to write under the pseudonym "Student," arranged for him to spend the academic year 1906-1907 studying under Karl Pearson at the Biometric Laboratory in University College, London. From Pearson, Gosset learned the theory of correlation and the Pearson system of frequency curves, both of which helped him in developing statistical techniques to analyze small-sample data.

"The study of the exact distributions of statistics commences in 1908 with Student's paper *The Probable Error of a Mean*" wrote R. A. Fisher in this famous paper which came from his period at the Biometric Laboratory:

- Gosset conjectured correctly the distribution of the sample variance s^2 in a normal sample.
- Unaware of work by Abbe and Helmert, he proved that s^2 and the mean \bar{x} of such a sample are uncorrelated and conjectured correctly that they are independent.

3. In essence he derived the t -distribution named after him, as a Pearson type VII frequency curve.

- 21- Gusset ("Student") received a degree in chemistry -----.
- 1) at Oxford 2) in 1900 3) in Canada 4) in Australia
- 22- The word "pseudonym" in paragraph 1 means
- 1) first name 2) family name 3) real name 4) false name
- 23- What was Gusset's pseudonym?
- 1) William 2) Sealy 3) Student 4) Teacher
- 24- He studied under -----.
- 1) Fisher 2) K. Pearson 3) Helmert 4) J. Pearson
- 25- He introduced -----.
- 1) Cauchy distribution 2) Gamma distribution
3) t -distribution 4) exponential distribution

PASSAGE 3:

In mathematical analysis and in probability theory, a σ -algebra (sigma field) on a set X is a collection of subsets of X that is closed under a countable-fold set operations (complement, union of countably many sets and intersection of countably many sets).

By contrast, an algebra is only required to be closed under finitary set operations. That is a σ -algebra is an algebra of sets, completed to include countably infinite operations. The pair (X, F) is called measure space and elements of F are named measurable sets. On the other hand, x is called sample space and every element of sigma-field is called an event.

- 26- The sets of all measurable sets would be -----.
- 1) X 2) (X, F) 3) (X, F, μ) 4) a sigma-field
- 27- An algebra -----.
- 1) is the sama σ -field
2) is closed under finite conditions of set operations
3) measures space
4) is a measurable set
- 28- A measurable set is -----.
- 1) a subset of X which belongs to F 2) X
3) \mathfrak{F} 4) (X, \mathfrak{F})
- 29- An algebra is closed under -----.
- 1) additivity
2) countable-field set operation
3) complement, union and intersection of sets
4) countable additivity
- 30- The word "event" in the last sentence means a -----.
- 1) measure space 2) measure
3) measurable space 4) measurable set

دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۳۱- اگر f تابعی فرد باشد و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$ ، آنگاه مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} (f(-xe^{-x}) + f(x^3 - x^5) + f(x^6 - x^7))$ کدام

است؟

(۱) a

(۲) $-3a$

(۳) $-a$

(۴) $3a$

۳۲- کدام سری همگرا است؟

(۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$

(۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$

(۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$

(۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n + e^n}$

۳۳- اگر تابع f در معادله $\cos(f(x)) + \frac{1}{\pi^3} (f(x))^3 + 2f(x) = 1 + x$ صدق کند، آنگاه مقدار $f'(0) + f'(\pi)$ کدام

است؟

(۱) $\frac{\pi}{\pi + 6}$

(۲) $\frac{\pi + 6}{2\pi + 6}$

(۳) $\frac{\pi + 6}{\pi}$

(۴) $\frac{2\pi + 6}{\pi + 6}$

۳۴- اگر $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n + n^2)x^n$ ، آنگاه $f(\frac{1}{3})$ کدام است؟

(۱) ۸

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۱

۳۵- مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ و محور x ها در بازه $[1, e^2]$ کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۴

(۳) ۳

(۴) ۲

۳۶- طول منحنی $f(x) = \int_1^x \sqrt{t^4 - 1} dt$ در بازه $[1, 3]$ کدام است؟

(۱) $\frac{19}{3}$

(۲) $\frac{25}{3}$

(۳) $\frac{26}{3}$

(۴) $\frac{28}{3}$

۳۷- کوتاه‌ترین فاصله بیضی به معادله $x^2 + xy + y^2 = 12$ تا مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) $\sqrt{2}$

(۲) $2\sqrt{6}$

(۳) ۴

(۴) $2\sqrt{2}$

۳۸- مقدار $\int_0^1 \int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} dy dx$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{2} - 1$

(۲) $2\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) $1 + \sqrt{2}$

۳۹- حجم جسم محصور به استوانه $x^2 + z^2 = 9$ و صفحات $x - y + z = 0$ و $x - y + z + 4 = 0$ کدام است؟

(۱) 72π

(۲) 36π

(۳) 18π

(۴) 9π

۴۰- اگر C منحنی فصل مشترک رویه‌های $x + y = 2a$ و $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0$ در جهت راستگرد، مقدار

$$\oint_C y dx + z dy + x dz$$

کدام است؟

(۱) $-2\sqrt{2}\pi a^2$

(۲) $-\sqrt{2}\pi a^2$

(۳) $\sqrt{2}\pi a^2$

(۴) $2\sqrt{2}\pi a^2$

۴۱- فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ تابع باشد و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$. کدام گزینه درست است؟

(۱) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

(۲) $f(A \cup f^{-1}(B)) = f(A) \cup B$

(۳) $f^{-1}(f(A) \cap B) = A \cap f^{-1}(B)$

(۴) $f^{-1}(f(A) \cup B) = A \cup f^{-1}(B)$

۴۲- فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ یک تابع با خاصیت زیر باشد:

$$\forall A, B \subseteq X (A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset)$$

کدام گزینه درست است؟

(۱) تابع f پوشا است ولی لزوماً یک به یک نیست.

(۲) تابع f یک به یک است ولی لزوماً پوشا نیست.

(۳) تابع f یک به یک و پوشا است.

(۴) تابع f لزوماً یک به یک و پوشا نیست.

۴۳- فرض کنید R, S, T و رابطه‌های دوتایی در مجموعه ناتهی A هستند. کدام گزینه درست است؟

(۱) $T \circ (R \cap S) = (T \circ R) \cap (T \circ S)$

(۲) $T \circ (R - S) = (T \circ R) - (T \circ S)$

(۳) $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$

(۴) $(R - S) \circ T = R \circ T - S \circ T$

۴۴- فرض کنید \mathbb{R} مجموعه اعداد حقیقی باشد، $A \subseteq \mathbb{R}$ و $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ تابع باشد. فرمول منطقی گزاره زیر کدام

گزینه است؟

در گزینه‌های زیر ε و δ مقید به اعداد مثبت، L مقید به اعداد حقیقی و a مقید به اعضای A است.

تابع f در هیچ نقطه‌ای از A حد ندارد.

(۱) $\forall a \forall L \exists \varepsilon \exists \delta \exists x (x \in A \wedge |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$

(۲) $\forall a \forall L \exists \varepsilon \forall \delta \forall x (x \in A \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| \geq \varepsilon)$

(۳) $\forall a \forall L \forall \varepsilon \exists \delta \exists x (x \in A \wedge |x - a| < \varepsilon \wedge |f(x) - L| \geq \delta)$

(۴) $\forall a \forall L \exists \delta \forall \varepsilon \exists x (x \in A \wedge |x - a| < \varepsilon \wedge |f(x) - L| \geq \delta)$

۴۵- فرض کنید $A < B$ به این مفهوم است که A با زیر مجموعه‌ای از B هم‌عدد (هم‌ارز) است ولی B با هیچ زیر مجموعه‌ای از A هم‌عدد (هم‌ارز) نیست. اگر $A < B$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) هیچ تابع پوشایی از B به A وجود ندارد.

(۲) هیچ تابع پوشایی از A به B وجود ندارد.

(۳) یک تابع یک به یک از B به A وجود دارد.

(۴) بین A و B یک تابع یک به یک و پوشا وجود دارد.

۴۶- کدام یک از توابع زیر از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 ، یک تبدیل خطی است؟

(۱) $T_1(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_2)$

(۲) $T_2(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 1)$

(۳) $T_3(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 - 1, 0)$

(۴) $T_4(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_1)$

۴۷- فرض کنید $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$ فضای V^\perp کدام است؟ (منظور از V^\perp ، فضای متعامد V در \mathbb{R}^4 است.)

(۱) $\{(a, 2a, b, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$

(۲) $\{(a, 2a, a, a) | a \in \mathbb{R}\}$

(۳) $\{(a, 2a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$

(۴) $\{(a, 2b, c, d) | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

۴۸- فرض کنید $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ که در هر سطر A ، دقیقاً یک عنصر ناصفر وجود دارد و

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ (10)^{10} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

در این صورت کدام یک از اعداد زیر، مقدار ویژه A است؟

(۱) ۰

(۲) ۱

(۳) ۱۰

(۴) 10^{10}

۴۹- فرض کنید A ماتریسی 8×8 با درایه‌های ۱ و -۱ باشد که هر دو سطر آن برهم عمودند. در این صورت قدرمطلق $\det(A)$ کدام است؟

(۱) ۸

(۲) 8^2

(۳) 8^3

(۴) 8^4

۵۰- اگر $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ و $\text{rank}(A) \leq 8$ باشد، آنگاه $\text{rank}(\text{adj}(A))$ کدام است؟

- (۱) ۰
(۲) ۲
(۳) ۸
(۴) ۱۰

۵۱- اگر E و F زیرمجموعه‌های ناتهی و کران‌دار \mathbb{R} باشند، $E + F = \{x + y : x \in E, y \in F\}$ و $EF = \{xy : x \in E, y \in F\}$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) $\sup(E + F) = \sup E + \sup F$
(۲) $\sup(EF) = \sup E \cdot \sup F$
(۳) اگر $E \cap F \neq \emptyset$ آنگاه $\sup(EUF) = \sup E + \sup F - \sup(E \cap F)$
(۴) اگر $E \cap F \neq \emptyset$ آنگاه $\sup(E \cap F) = \sup E \cdot \sup F$

۵۲- اگر $\lim a_n = 0$ و برای هر $n \geq 1$ ، $a_n - a_{n+1} \geq \frac{1}{n(n+1)}$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|}$ همگرا است. (۲) برای هر n ، $a_n \geq \frac{1}{n}$
(۳) سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است. (۴) برای هر n ، $a_n \leq \frac{1}{n}$

۵۳- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است که تنها در یک نقطه مشتق پذیر است.
(۲) اگر تابع $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتق کراندار باشد، دنباله $\{f(\frac{1}{n})\}$ همگرا است.
(۳) تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است که تنها در اعداد اصم پیوسته است.
(۴) تابع مشتق پذیر $f: [0, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است که $f'(x) = [x]$ ($0 \leq x \leq 7$)

۵۴- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{گویا} \\ 0 & \text{اصم} \end{cases}$ و $a = \int_0^1 f(x) dx$ و $b = \int_0^1 f(x) dx$ به ترتیب انتگرال ریمان بالایی و پایینی f باشند. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $a = b = 0$
(۲) $b = 0$ ، $a = \frac{1}{4}$
(۳) $a = b = \frac{1}{4}$
(۴) $b = \frac{1}{5}$ ، $a = \frac{1}{4}$

۵۵- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) مجموع هر دو تابع پیوسته یکنواخت، پیوسته یکنواخت است.
 (۲) اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق کراندار داشته باشد، پیوسته یکنواخت است.
 (۳) حاصل ضرب هر دو تابع پیوسته یکنواخت، پیوسته یکنواخت است.
 (۴) اگر f در بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر ریمان باشد آنگاه تابع $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ بر بازه $[a, b]$ پیوسته یکنواخت است.

۵۶- فرض کنید یک دستگاه معادلات خطی با روش حذفی گاوس و محورگزینی سطری در یک کامپیوتر با روند عدد یک برای نمایش اعداد حقیقی برابر با 10^{-14} ، حل شود. اگر عدد حالت ماتریس ضرایب دستگاه برابر با 10^{14} باشد، آنگاه تعداد رقم‌های ده‌دهی قابل اعتماد در جواب به دست آمده حداکثر کدام است؟

- (۱) ۰
 (۲) ۱
 (۳) ۱۳
 (۴) ۱۵

۵۷- برای اینکه قاعده انتگرال گیری دوزنقه‌ای برای محاسبه $\int_0^1 (x^5 - cx^4)dx$ دقیق باشد، مقدار c کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{18}$
 (۲) $\frac{3}{10}$
 (۳) $\frac{1}{30}$
 (۴) $\frac{10}{9}$

۵۸- اگر روش نیوتن برای حل مسئله $x^2 - 2\sin^2 x = 0$ به یک عدد مثبت x همگرا شود، آنگاه نرخ همگرایی مجانبی کدام است؟

- (۱) ۱
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) $1 < p < 2$

۵۹- تابع $f(x) = 2\sin 3x + 3\sin 2x + x^2$ روی بازه $[0, \pi]$ را با چه طول گام h باید جدول بندی کرد تا خطای حاصل از درون‌یابی تکه‌ای خطی از 10^{-6} بیشتر نشود؟

- (۱) ۰٫۰۰۳
 (۲) ۰٫۰۰۵
 (۳) ۰٫۰۰۰۳
 (۴) ۰٫۰۰۰۵

۶۰- دنباله حاصل از تکرار نقطه ثابت به صورت $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ، $n=0, 1, 2, \dots$ که $\varphi(x) = 3x + Bx^2 + Cx^3$ را

در نظر بگیرید. ضرایب B و C چگونه باشند که تکرارها به صورت موضعی به $\frac{1}{\alpha}$ با مرتبه همگرایی دست کم ۳،

همگرا شوند؟ (α عدد مثبت است)

(۱) $B = 3\alpha^2$, $C = 3$

(۲) $B = 3\alpha$, $C = \alpha^2$

(۳) $B = -3\alpha$, $C = \alpha^2$

(۴) $B = 3$, $C = 3\alpha$

۶۱- به چند طریق می توان ۲۰ ورزشکار را به ۵ گروه دو نفره و ۲ گروه پنج نفره تقسیم نمود؟

(۱) $\frac{20!}{(2!)^4(5!)}$

(۲) $\frac{20!}{(2!)^5(5!)^2}$

(۳) $\frac{20!}{(2!)^6(5!)^3}$

(۴) $\frac{20!}{(2!)^5(5!)^2 7!}$

۶۲- اگر جمع میانگین و میانه یک نمونه تصادفی ۱۲ تایی برابر ۲۲ و بزرگترین یافته نمونه برابر ۱۷ باشد، جمع میانگین

و میانه وقتی که بزرگترین یافته نمونه با ۲۳ جایگزین شود، کدام است؟

(۱) $22/5$

(۲) ۲۳

(۳) $23/5$

(۴) ۲۴

۶۳- از n توپ با شماره‌های $n, n-1, \dots, 1, 2, 0$ به تصادف ۳ توپ بدون جایگذاری خارج می کنیم. احتمال اینکه اولین توپ

شماره‌ای کوچک تر از دومین توپ داشته باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{1}{n}$

۶۴- ظرفی شامل ۲ مهره قرمز، ۲ مهره آبی، یک مهره سیاه و ۴ مهره سفید است. به ترتیب و به تصادف بدون جایگذاری از ظرف مهره خارج می‌کنیم. احتمال اینکه سومین مهره سفید در بار هفتم ظاهر شود، کدام است؟

(۱) $\frac{5}{9}$

(۲) $\frac{5}{21}$

(۳) $\frac{5}{18}$

(۴) $\frac{5}{42}$

۶۵- فرض کنید B_1, B_2, \dots, B_n پیشامدهای مستقل روی یک فضای نمونه‌ای باشند که $P(B_i) = \frac{1}{i+1}$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ است. احتمال اینکه دقیقاً یکی از این پیشامدها رخ دهد، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{n+1}$

(۲) $\frac{n}{n+1}$

(۳) $\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1}$

(۴) $\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$

دروس تخصصی (احتمال، آمار ریاضی، نمونه‌گیری و رگرسیون ۱):

۶۶- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. مقدار c کدام است؟

$$f(x) = c2^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

(۱) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

(۲) $\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}$

(۳) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

(۴) $\sqrt{\frac{\pi}{\ln 2}}$

۶۷- فرض کنید $X \sim \text{Bin}(1, p)$ و F تابع توزیع X باشد. $P(F(X) = q)$ کدام است؟

(۱) q

(۲) q^2

(۳) p

(۴) p^2

۶۸- فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان $\text{Bin}(1, p)$ باشند و تعریف کنیم

$$N_n = \sum_{i=1}^n X_i, \text{ مقدار } P(N_n = 2, N_n = 3) \text{ کدام است؟}$$

(۱) $3 \circ p^2 q^5$

(۲) $3 \circ p^2 q^6$

(۳) $3 \circ p^5 q^2$

(۴) $3 \circ p^6 q^2$

۶۹- فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت روی بازه $(0, 1)$ و n یک عدد طبیعی باشد. توزیع $Y = [nX]$ کدام است؟

($[X]$ = جزء صحیح X)

(۱) یکنواخت بر روی مجموعه‌ها $\{0, 1, \dots, n-2\}$

(۲) یکنواخت بر روی مجموعه‌ها $\{0, 1, \dots, n+1\}$

(۳) یکنواخت بر روی مجموعه‌ها $\{0, 1, \dots, n\}$

(۴) یکنواخت بر روی مجموعه‌ها $\{0, 1, \dots, n-1\}$

۷۰- از 10000 واحد تولیدی یک شرکت 100 واحد معیوب می‌باشد. احتمال تقریبی این که حداکثر یک معیوب در

یک نمونه 100 تایی باشد، کدام است؟

(۱) e^{-1}

(۲) $2e^{-1}$

(۳) e^{-2}

(۴) $2e^{-2}$

۷۱- فرض کنید $X \sim \text{Exp}(1)$ باشد، تابع احتمال $T = [-X]$ کدام است؟ ($[t]$ جزء صحیح t را نشان می‌دهد)

(۱) $t = -1, -2, \dots$ برای $e^{-1}(1 - e^{-1})^t$

(۲) $t = -1, -2, \dots$ برای $(1 - e^t)(e - 1)$

(۳) $t = -1, -2, \dots$ برای $e^t(e - 1)$

(۴) $t = +1, +2, \dots$ برای $e^{-1}(1 - e^{-1})^t$

۷۲- فرض کنید X یک متغیر تصادفی بواسون با میانگین λ و $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی کراندار و دلخواه باشد. مقدار

$$\frac{E(Xg(X))}{E(g(X+1))}$$

کدام است؟

- (۱) λ
- (۲) $\lambda(\lambda - 1)$
- (۳) λ^2
- (۴) $\lambda(\lambda + 1)$

۷۳- فرض کنید تابع مولد گشتاور X برابر با $M_X(t) = \frac{1}{81}(e^t + 2)^4$ باشد، مقدار $P(X \leq 1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{81}$
- (۲) $\frac{16}{27}$
- (۳) $\frac{8}{81}$
- (۴) $\frac{32}{81}$

۷۴- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد. با تعریف متغیر تصادفی $Y = a + bX + cX^2$ ، مقدار

$\text{corr}(X, Y)$ کدام است؟

- (۱) ۰
- (۲) $\frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}$
- (۳) $\frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}$
- (۴) $\frac{b+c}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}$

۷۵- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0, 1)$ باشد. مقدار $\text{cov}(X_1^2, \bar{X}^2)$ کدام است؟

(\bar{X} = میانگین نمونه‌ای)

- (۱) $\frac{n+1}{n^2}$
- (۲) $\frac{2}{n^2}$
- (۳) $\frac{1}{n^2}$
- (۴) $2n^2$

۷۶- فرض کنید X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد. مقدار $P\left(\frac{[X]}{1+[X]} > \frac{2}{3}\right)$ کدام است؟ $([t])$ جزء صحیح t را نشان می‌دهد)

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad x > 0$$

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $\frac{2}{3}$

۷۷- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان یکنواخت روی مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشند. مقدار $P(X < Y)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{n^2 - 1}{2n}$

(۳) $\frac{n+1}{2n}$

(۴) $\frac{n-1}{2n}$

۷۸- فرض کنید $X \sim N(1, 1)$ باشد. مقدار $E(X + 1 | |X - 1|)$ کدام است؟

(۱) -2

(۲) -1

(۳) 1

(۴) 2

۷۹- عددی را به تصادف از بازه $(0, 1)$ انتخاب و آن را با X نمایش می‌دهیم. سپس عدد دیگری را به تصادف از بازه $(0, X)$ انتخاب می‌کنیم. اگر Y نمایانگر متغیر تصادفی محل نقطه دوم باشد، مقدار $P(4Y > X)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{2}{4}$

۸۰- فرض کنید $X \sim \text{Beta}(2, 1)$ و $Y|X=x \sim \text{Exp}(\frac{1}{x})$ باشد. مقدار $\text{cov}(X, Y)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$

(۲) $\frac{1}{9}$

(۳) $\frac{1}{18}$

(۴) $\frac{1}{16}$

۸۱- فرض کنید (X, Y) دارای توزیع نرمال دو متغیره باشند. شرط لازم و کافی برای استقلال $X+Y$ و $X-Y$ کدام است؟

(۱) $\text{var}(X) = \text{var}(Y)$

(۲) $E(X) = E(Y)$

(۳) $\text{var}(X) = \text{var}(Y)$ و $E(X) = E(Y)$

(۴) همواره مستقل اند.

۸۲- فرض کنید تابع مولد گشتاور توأم متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 به صورت زیر باشد. مقدار $P(X_1 + X_2 > 0)$ کدام است؟

$$M_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = \exp\left(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_1^2 + \frac{1}{2}t_2^2 - \frac{1}{2}t_1t_2\right)$$

(۱) ۰٫۶۱۷۹

(۲) ۰٫۶۹۱۵

(۳) ۰٫۳۰۸۵

(۴) ۰٫۳۸۲۱

۸۳- فرض کنید X_1, X_2 یک نمونه تصادفی دوتایی از متغیر تصادفی X با تابع احتمال زیر باشد. مقدار $E(X_{(2)})$ کدام است؟

x	-۱	۰	۱
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(۱) صفر

(۲) $\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{2}{8}$

(۴) $\frac{3}{8}$

۸۴- اگر $X \sim U(0, 1)$ و $Y|X=x \sim \text{Bin}(n, x)$ مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} P[Y < nX]$ کدام است؟

(۱) ۰

(۲) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ۱

۸۵- فرض کنید $X \sim \chi^2_{(n)}$ ، توزیع حدی (مجانبی) $\frac{X}{n}$ کدام است؟

(۱) تباهیده در نقطه ۱

(۲) تباهیده در نقطه صفر

(۳) $N(0, 1)$

(۴) توزیع حدی ندارد.

۸۶- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از تابع احتمال زیر باشد. اگر $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$

و $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ و $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ باشند. آماره بسنده برای (θ, α) کدام است؟

$f(x) = (1-\theta)\theta^{x-\alpha}$, $x = \alpha, \alpha+1, \dots$; $0 < \theta < 1, a \in \mathbb{R}$

(۱) $X_{(1)}$

(۲) $(X_{(1)}, \bar{X})$

(۳) $(\bar{X}, X_{(n)})$

(۴) $(X_{(1)}, X_{(n)})$

۸۷- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد. آماره بسنده مینیمال θ کدام است؟

(K یک عدد ثابت نرمال‌ساز است.)

$f_{\theta}(x) = K \exp\{-(x-\theta)^f\}$, $x \in \mathbb{R}$; $\theta \in \mathbb{R}$

(۱) $(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^f)$

(۲) $(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^f, \sum_{i=1}^n x_i^{2f})$

(۳) $(\sum_{i=1}^n x_i^f, \sum_{i=1}^n x_i^{2f}, \sum_{i=1}^n x_i^f)$

(۴) $(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^f, \sum_{i=1}^n x_i^f)$

۸۸- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از $N(\theta, 1)$ باشد. اگر M میانه توزیع باشد. مقدار $E(M(\sum x_i))$ کدام است؟

(۱) $2\bar{X}$

(۲) M

(۳) \bar{X}

(۴) $\sum X_i$

۸۹- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $U(0, \theta)$ باشد. اگر $\hat{\theta}$ و $\tilde{\theta}$ به ترتیب برآوردهای ماکزیمم درست‌نمایی و گشتاوری برای θ باشند، مقدار $cov(\hat{\theta}, \tilde{\theta})$ کدام است؟

(۱) $\frac{\theta^2}{6n}$

(۲) $\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$

(۳) $\frac{\theta^2}{6n^2}$

(۴) $\frac{\theta^2}{(n+1)(n+2)}$

۹۰- فرض کنید $0.3, 0.19, 0.27, 0.16, 0.25$ یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیع $U(\theta^2, \theta)$ باشد که در آن $\theta \in (0, 1)$ است. برآوردهای (های) ماکزیمم درست‌نمایی (ML) برای پارامتر θ کدام است؟

(۱) 0.3

(۲) 0.4

(۳) 0.25

(۴) $0.4, 0.3$

۹۱- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $Bin(1, \theta)$ باشد که در آن $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ است. برآوردهای

ماکزیمم درست‌نمایی (MLE) پارامتر θ کدام است؟

(۱) \bar{X}

(۲) $\max(\bar{X}, \frac{1}{2})$

(۳) $\frac{1}{2}(\bar{X} + \frac{1}{2})$

(۴) $\min(\bar{X}, \frac{1}{2})$

۹۲- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. $UMVUE$ برای $\frac{1}{\theta}$ کدام است؟

$$f_{\theta}(x) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)}, \quad x > 0, \quad \theta > 0$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1+X_i) \quad (۱)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i \quad (۲)$$

$$\frac{1}{n} \ln \sum_{i=1}^n X_i \quad (۳)$$

$$\frac{1}{n} \ln \sum_{i=1}^n (1+X_i) \quad (۴)$$

۹۳- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $N(0, \theta)$ باشد. $UMVUE$ پارامتر θ^2 کدام است؟

$$\frac{1}{n(n+2)} (\sum X_i)^2 \quad (۱)$$

$$\frac{1}{n(n+1)} (\sum X_i^2)^2 \quad (۲)$$

$$\frac{1}{n(n+2)} (\sum X_i^2)^2 \quad (۳)$$

$$\frac{1}{n(n+2)} \sum X_i^2 \quad (۴)$$

۹۴- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\theta, 1)$ باشد. $UMVUE$ پارامتر e^{θ} کدام است؟

$$e^{\bar{x} + \frac{1}{n}} \quad (۱)$$

$$e^{-(\bar{x} - \frac{1}{2n})} \quad (۲)$$

$$e^{\bar{x} - \frac{1}{2n}} \quad (۳)$$

$$e^{\bar{x} - \frac{1}{n}} \quad (۴)$$

۹۵- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $Beta(\theta, 1)$ باشد. کران پایین کرامر - راتو در برآورد ناریب

پارامتر $\gamma(\theta) = P_\theta(X_1 > e^{-1})$ کدام است؟

$$\frac{\theta e^{-\theta}}{n} \quad (۱)$$

$$n\theta e^{-\theta} \quad (۲)$$

$$n\theta^\gamma e^{-\gamma\theta} \quad (۳)$$

$$\frac{\theta^\gamma e^{-\gamma\theta}}{n} \quad (۴)$$

۹۶- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع لاگ نرمال با پارامتر μ نامعلوم و σ^2 معلوم باشد. یک

فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ درصدی برای $\theta = e^\mu$ کدام است؟ $z_{1-\alpha}$ چندک $(1-\alpha)$ توزیع نرمال استاندارد

است، یعنی $(P(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1-\alpha)$

$$e^{\frac{1}{n} \sum \ln X_i - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \theta < e^{\frac{1}{n} \sum \ln X_i + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \quad (۱)$$

$$\bar{X} e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}} < \theta < \bar{X} e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \quad (۲)$$

$$-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{1}{n} \sum \ln X_i} < \theta < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{1}{n} \sum \ln X_i} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \theta < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad (۴)$$

۹۷- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu, a^2\sigma^2)$ که در آن $a > 0$ معلوم و μ, σ^2 نامعلوم

هستند، یک فاصله اطمینان $100(1-\alpha)$ درصدی برای μ کدام است؟

$t_{(n; 1-\alpha)}$ چندک $1-\alpha$ توزیع $t_{(n)}$ است، یعنی $P(T \leq t_{(n; 1-\alpha)}) = 1-\alpha$ و $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$

$$(S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2)$$

$$\left(\bar{X} - t_{(n-1; 1-\frac{\alpha}{2})} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{(n-1; 1-\frac{\alpha}{2})} \frac{S}{\sqrt{n}} \right) \quad (۱)$$

$$\left(\bar{X} - t_{(n-1; 1-\frac{\alpha}{2})} \frac{aS}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{(n-1; 1-\frac{\alpha}{2})} \frac{aS}{\sqrt{n}} \right) \quad (۲)$$

$$\left(\bar{X} - t_{(n-1; 1-\frac{\alpha}{2})} \frac{S}{a\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{(n-1; 1-\frac{\alpha}{2})} \frac{S}{a\sqrt{n}} \right) \quad (۳)$$

$$\left(a\bar{X} - t_{(n-1; 1-\frac{\alpha}{2})} \frac{aS}{\sqrt{n}}, a\bar{X} + t_{(n-1; 1-\frac{\alpha}{2})} \frac{aS}{\sqrt{n}} \right) \quad (۴)$$

- ۹۸- در آزمون فرضیه براساس لم‌نیمن - پیرسون، افزایش احتمال ارتکاب خطای نوع اول به شرط ثابت بودن سایر عوامل، موجب می‌شود که ...
- (۱) توان آزمون کاهش یابد.
 - (۲) احتمال ارتکاب خطای نوع دوم افزایش یابد.
 - (۳) توان آزمون افزایش یابد.
 - (۴) احتمال ارتکاب خطای نوع دوم ثابت باشد.

۹۹- فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونه تصادفی از تابع احتمال زیر باشد. فرضیه $H_0: \theta \leq \frac{1}{4}$ در مقابل $H_1: \theta > \frac{1}{4}$

رد می‌شود هرگاه $\sum_{i=1}^3 X_i > 4$ باشد. اندازه آزمون کدام است؟ ($0 < \theta < 1$)

$X=x$	-۱	۱	۲
$P(X=x)$	$\frac{1-\theta}{2}$	$\frac{1-\theta}{2}$	θ

(۱) $\frac{9}{128}$

(۲) $\frac{3}{128}$

(۳) $\frac{11}{128}$

(۴) $\frac{119}{128}$

- ۱۰۰- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد. اگر N_j برابر تعداد X_i های برابر با $j, j=1, 2, 3$ باشد، برای آزمون فرض $H_0: \theta = \theta_0$ در مقابل $H_1: \theta = \theta_1 (> \theta_0)$ ناحیه بحرانی پرتوان‌ترین آزمون کدام است؟ ($0 < \theta < 1$)

x	۱	۲	۳
$P_\theta(X=x)$	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

(۱) $N_1 + 2N_2 \geq c$

(۲) $2N_1 + N_2 \geq c$

(۳) $N_1 + N_2 \geq c$

(۴) $2N_1 + N_2 < c$

۱۰۱- فرض کنید تک مشاهده X دارای تابع توزیع زیر باشد. تابع آزمون پرتوان‌ترین آزمون در سطح α برای آزمون فرض $H_0: \theta = 2$ در مقابل $H_1: \theta = 1$ کدام است؟

$$F_\theta(x) = (1 - e^{-x})^\theta, x > 0, \theta > 0$$

$$I_{(0, -\ln\alpha)}(x) \quad (1)$$

$$I_{(0, -\ln(1-\alpha))}(x) \quad (2)$$

$$I_{(-\ln\alpha, \infty)}(x) \quad (3)$$

$$I_{(0, -\ln(1-\sqrt{\alpha}))}(x) \quad (4)$$

۱۰۲- فرض کنید $X \sim \text{Ge}(\theta)$ (مدل تعداد آزمایش‌ها) باشد. برای آزمون فرض $H_0: \theta = \frac{1}{8}$ در مقابل $H_1: \theta = \frac{1}{4}$ توان پرتوان‌ترین آزمون در سطح $\alpha = 0.125$ کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{8} \quad (3)$$

$$\frac{7}{8} \quad (4)$$

۱۰۳- فرض کنید $F(x)$ و $G(x)$ دو تابع توزیع پیوسته روی \mathbb{R} باشند. همچنین فرض کنید X یک تک‌مشاهده از تابع توزیع $H_\theta(x) = \theta F(x) + (1-\theta)G(x)$ باشد که در آن $\theta \in (0, 1)$ است. این خانواده از توزیع‌ها دارای خاصیت MLR در چه آماره‌ای می‌باشد؟ (f و g تابع چگالی احتمال‌های تابع توزیع‌های به ترتیب F و G هستند)

$$T(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (1)$$

$$T(x) = \theta_0 f(x) + (1-\theta_0)g(x) \quad (2)$$

$$T(x) = f(x) + g(x) \quad (3)$$

$$T(x) = \theta_1 f(x) + (1-\theta_1)g(x) \quad (4)$$

۱۰۴- فرض کنید $X \sim \text{Beta}(\theta, 1)$ باشد. برای آزمودن فرض $H_0: \theta = 2$ در مقابل $H_1: \theta = 1$ ، به روش آزمون نسبت درستنمایی (LRT)، کدام یک از آزمون‌های زیر، کمترین مقدار مجموع خطای نوع اول و دوم ($\alpha + \beta$) را دارا است؟

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{4} \text{ or } x > \frac{3}{4} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x > \frac{1}{2} \\ 0 & x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{2} \\ 0 & x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4)$$

۱۰۵- فرض کنید Y_1, \dots, Y_n متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند و $Y_i \sim P(\theta x_i)$ ، $i = 1, \dots, n$ ، که در آن $\theta > 0$ پارامتر مجهول و x_1, \dots, x_n ثابت‌های معلوم هستند. برای آزمون فرض $H_0: \theta = 1$ در مقابل $H_1: \theta \neq 1$ آماره آزمون نسبت درستنمایی (LRT) کدام است؟

$$\left(\frac{\sum y_i}{\sum x_i} \right)^{\sum y_i} e^{\sum x_i - \sum y_i} \quad (1)$$

$$\left(\frac{\sum x_i}{\sum y_i} \right)^{\sum y_i} e^{\sum y_i - \sum x_i} \quad (2)$$

$$\left(\frac{\sum x_i}{\sum y_i} \right)^{\sum x_i} e^{\sum x_i - \sum y_i} \quad (3)$$

$$\left(\frac{\sum y_i}{\sum x_i} \right)^{\sum x_i} e^{\sum y_i - \sum x_i} \quad (4)$$

۱۰۶- شهری دارای سه منطقه روستایی است. برای برآورد کل محصول گندم در این شهر هر منطقه را یک طبقه از روستاها در نظر می‌گیریم. میزان محصول گندم بر حسب تن براساس یک طرح نمونه‌گیری طبقه‌بندی به شرح جدول زیر به دست آمده است.

منطقه	تعداد روستاها	تعداد روستاهای نمونه	میزان محصول گندم در روستاهای نمونه			
۱	۱۵	۳	۱	۲	۳	-
۲	۱۵	۳	۲	۳	۴	-
۳	۲۰	۴	۳	۳	۵	۲

یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای مقدار کل گندم در این شهر کدام است؟ ($Z_{0.975} = 2$)

(۱) $115 \pm 4\sqrt{70}$

(۲) $115 \pm 2\sqrt{70}$

(۳) $105 \pm 4\sqrt{70}$

(۴) $105 \pm 2\sqrt{70}$

۱۰۷- جامعه‌ای با سه طبقه و مشخصات زیر را در نظر بگیرید. برای انتخاب نمونه‌ای تصادفی به حجم ۲۰۰ از این جامعه، حجم نمونه لازم براساس تخصیص نیمین در هر یک از طبقات کدام است؟

شماره طبقه	حجم طبقه	واریانس طبقه (S_h^2)
۱	۲۰۰	۶/۲۵
۲	۲۵۰	۱۶
۳	۵۰	۱۰۰

(۱) طبقه اول و دوم ۷۵، طبقه سوم ۵۰

(۲) طبقه اول و سوم ۵۰، طبقه دوم ۱۰۰

(۳) طبقه اول ۸۰، طبقه دوم ۱۰۰، طبقه سوم ۲۰

(۴) طبقه اول ۳۶، طبقه دوم ۱۱۴، طبقه سوم ۵۰

۱۰۸- در یک نمونه‌گیری تصادفی بدون جایگذاری، Y_i عنصر i ام جامعه‌ای به حجم N و y_i عنصر i ام نمونه‌ای به حجم n است. امید ریاضی $\sum_{i=1}^n y_i^2$ بر حسب S^2 (واریانس نااریب جامعه) و \bar{Y} (میانگین جامعه) کدام است؟

(۱) $n(N-1)S^2 + nN\bar{Y}^2$

(۲) $\frac{N-1}{N}S^2 + \bar{Y}^2$

(۳) $n(S^2 + \bar{Y}^2)$

(۴) $\frac{n(N-1)}{N}S^2 + n\bar{Y}^2$

۱۰۹- برای برآورد تعداد زائرین اربعین حسینی کربلا در یک سال معین، مشخص شد ۲ میلیون زائر ایرانی در مراسم اربعین در این شهر شرکت نموده‌اند. در این مراسم از بین کلیه زائرین به تصادف و با جایگذاری آنقدر نمونه گرفتیم تا ۱۰۰۰ زائر ایرانی در نمونه انتخاب شوند. حجم نمونه لازم تا حصول این نتیجه ۱۲۵۰۰ نفر بوده است. یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای تعداد کل این زائرین حدوداً کدام است؟ ($Z_{0.975} = 2$)

$$(1) 2072\sqrt{0.575}$$

$$(2) 2272\sqrt{0.757}$$

$$(3) 2572\sqrt{0.575}$$

$$(4) 2872\sqrt{0.757}$$

۱۱۰- برای برآورد نسبت افراد چپ‌دست در بین کارکنان اداره‌ای با ۴۰۰ کارمند مرد و ۲۰۰ کارمند زن به‌طور جداگانه از بین آقایان ۶۰ و از بین خانم‌ها ۴۰ نفر را به تصادف انتخاب نموده‌ایم که در بین آقایان نمونه ۶ نفر و در بین خانم‌های نمونه ۱۲ نفر چپ‌دست بوده‌اند. اگر بخواهیم نسبت موردنظر را با کران خطای ۰/۰۲ برآورد کنیم در صورت نیاز حدوداً چند کارمند مرد و چند کارمند زن دیگر را باید به نمونه بیفزاییم؟ ($Z_{0.975} = 2$)

$$(1) 107 \text{ مرد و } 48 \text{ زن}$$

$$(2) 213 \text{ مرد و } 97 \text{ زن}$$

$$(3) 273 \text{ مرد و } 137 \text{ زن}$$

$$(4) \text{ همین حجم نمونه کافی است.}$$

۱۱۱- از جامعه‌ای به حجم N یک نمونه تصادفی ساده بدون جایگذاری به حجم n می‌گیریم. سپس از این نمونه، مجدداً یک نمونه تصادفی ساده بدون جایگذاری به حجم n^* می‌گیریم. اگر نمونه اخیر با (y_1, \dots, y_n) نشان داده شود، شانس استخراج این نمونه چقدر است؟

$$(1) \frac{1}{\binom{N}{n-n^*}}$$

$$(2) \frac{\binom{N-n^*}{n-n^*}}{\binom{N}{n}}$$

$$(3) \frac{1}{\binom{N-n}{n-n^*}}$$

$$(4) \frac{\binom{N-n^*}{n-n^*}}{\binom{N}{n} \binom{n}{n^*}}$$

۱۱۲- فرض کنید در جامعه‌ای متناهی نسبت صفت A (P_A) دو برابر نسبت صفت B (P_B) باشد. اگر کارایی روش نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری برای برآورد نسبت P_A دو برابر نسبت P_B باشد، مقدار P_A کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{7}$
(۲) $\frac{3}{7}$
(۳) $\frac{1}{7}$
(۴) $\frac{6}{7}$

۱۱۳- اداره‌ای ۱۲۵۰ کارمند دارد. در یک نمونه تصادفی ساده ۲۵۰ تایی تعداد فرزندان کارمند نمونه انتخابی و جنسیت کارمند ثبت و نتایج جدول زیر حاصل شده است:

جنسیت \ تعداد فرزند	تعداد فرزند			
	۰	۱	۲	۳
مرد	۵۰	۱۰۰	۳۰	۲۰
زن	۲۵	۱۰	۱۰	۵

بر این اساس، تعداد کل فرزندان کارکنان زن در این اداره را چند نفر برآورد می‌کنید؟

- (۱) ۲۲۵
(۲) ۲۴۵
(۳) ۲۶۵
(۴) ۱۱۲۵

۱۱۴- در یک نمونه‌گیری تصادفی ساده با جایگذاری برای برآورد نسبت خاصی در جامعه‌ای به حجم ۲۰۰، نمونه‌ای به حجم ۲۵ گرفته‌ایم. اگر برآورد ناریب واریانس برآوردگر این نسبت در جامعه برابر 0.01 باشد و بدانیم برآورد نسبت مورد نظر در جامعه کمتر از 0.05 است. مقدار دقیق برآورد این نسبت در جامعه چقدر است؟

- (۱) 0.1
(۲) 0.2
(۳) 0.3
(۴) 0.4

۱۱۵- در شهری کوچک ۵۰ اداره وجود دارد که جمعاً ۱۰۰۰ کارمند در آنها مشغول به کار هستند. پنج اداره به تصادف، با جایگذاری و با احتمال متناسب با تعداد کارمندان انتخاب شده‌اند و پس از نظرسنجی از مدیران ادارات در مورد تغییر ساعات اداری، اطلاعات زیر به دست آمده است:

اداره	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد کارمندان	۲۰	۳۰	۴۰	۲۰	۵۰
نظر مدیر اداره	مخالف	موافق	موافق	مخالف	موافق

برآورد تعداد اداراتی که مدیر آنها موافق با طرح تغییر ساعات اداری در کل شهر هستند، کدام است؟

۱۵ (۱)

۱۸ (۲)

۲۴ (۳)

۳۰ (۴)

۱۱۶- در یک مدل رگرسیون خطی چندگانه برای متغیر پاسخ میزان مصرف بنزین، ۴ متغیر پیشگوی X_1 : قدرت اسب بخار، X_2 : طول ماشین، X_3 : عرض ماشین و X_4 : وزن ماشین، رابطه زیر پیش‌بینی شده است:

$$\hat{y} = 26 - 0.99X_1 + 0.18X_2 - 0.15X_3 - 0.07X_4$$

برآورد متوسط تغییر در مصرف بنزین به ازای یک واحد تغییر در طول ماشین وقتی که سایر متغیرها ثابت باشند، کدام است؟

(۱) -0.18

(۲) 0.82

(۳) 0.18

(۴) ۲۶

۱۱۷- در مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ که در آن $i = 1, \dots, n$ ، $E(\varepsilon_i) = 0$ و $\text{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ و $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ به ازای هر $i \neq j$ ، مانده‌های مدل (ε_i) در کدام یک از شرایط زیر صدق می‌کنند؟

(۱) واریانس ثابت دارند و هم بسته‌اند.

(۲) واریانس ثابت دارند و ناهم بسته‌اند.

(۳) واریانس ثابت ندارند و هم بسته‌اند.

(۴) واریانس ثابت ندارند و ناهم بسته‌اند.

۱۱۸- براساس یک نمونه تصادفی ۱۲ تایی خلاصه اطلاعات زیر حاصل شده است. مقدار آماره آزمون F در جدول تحلیل واریانس کدام است؟

$$SSX = \sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2 = 24, \quad r_{xy} = 0.8, \quad \hat{y}_i = 6 + 2x_i$$

(۱) $\frac{15}{8}$

(۲) $\frac{150}{8}$

(۳) $\frac{160}{9}$

(۴) $\frac{16}{9}$

۱۱۹- در مدل رگرسیونی $y_i = \frac{x_i}{\beta_0 x_i + \beta_1 + x_i \varepsilon_i}$ ، $i=1, \dots, n$ ، برآورد β_1 به روش کمترین توان‌های دوم، کدام است؟

$$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})}{y_i}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (۱)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{n}{x_i y_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{n}{x_i^2} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)^2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{\bar{x}}\right) \left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{\bar{y}}\right)}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{\bar{x}}\right)^2} \quad (۴)$$

۱۲۰- در برازش مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ، $i=1, \dots, 4$ ، اطلاعات زیر موجود است. مقدار \hat{y}_4 کدام است؟

y_i (مقدار پاسخ)	۳	۲	۱	۴
\hat{y}_i (مقدار برازش شده)	۳/۵۱	۱/۹۹	۱/۲	\hat{y}_4

(۱) ۳/۲۲

(۲) ۳/۸

(۳) ۳/۹۴

(۴) اطلاعات کافی نیست.

۱۲۱- در رگرسیون خطی گذر از مبدأ به صورت $y_i = \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ، $i=1, \dots, n$ ، که ε_i ها مستقل و هم توزیع با $N(0, \sigma^2)$ است، برآورد ناریب $(\hat{\beta}_1)$ کدام است؟

$$\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-2) \sum x_i^2} \quad (1)$$

$$\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{(n-1) \sum x_i^2} \quad (2)$$

$$\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{(n-2) \sum x_i^2} \quad (3)$$

$$\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-1) \sum x_i^2} \quad (4)$$

۱۲۲- مدل رگرسیون خطی $y_i = \beta_0 + \beta_1 A_i + \beta_2 (A_i \times G_i) + \varepsilon_i$ را در نظر بگیرید که در آن، y_i میزان درآمد، A_i سن و G_i جنسیت فرد نام ($G_i = 1$ برای مردان و $G_i = 0$ برای زنان) است. کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

(۱) با افزایش سن، متوسط درآمد مردان β_2 واحد تغییر می کند.

(۲) متوسط درآمد زنان با افزایش سن، $|\beta_1|$ واحد افزایش می یابد.

(۳) برآورد متوسط درآمد مردی ۶۰ ساله، $(\beta_1 + \beta_2) + \beta_0$ است.

(۴) اگر $\beta_2 > 0$ باشد، متوسط درآمد مردان از زنان هم سن آنها بیشتر است.

۱۲۳- در مدل رگرسیون خطی چندگانه $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$ برای $i=1, \dots, 10$ اگر مقدار آماره آزمون معنی داری خط رگرسیونی $F=6$ باشد، چه مقدار از تغییرات متغیر پاسخ توسط مدل رگرسیونی قابل توضیح است؟

(۱) ۷۵٪

(۲) ۷۲٪

(۳) ۶۶٪

(۴) ۴۳٪

۱۲۴- در رگرسیون خطی چندگانه $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$ خلاصه اطلاعات زیر براساس یک نمونه ۷ تایی به دست آمده است. مقدار آماره آزمون فرض $H_0: \beta_1 = \beta_2$ کدام است؟

$$(x'x)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}, \text{SSE} = 36, \text{SSR} = 421, \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2.5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(۱) $\frac{1}{6}$

(۲) $\frac{5}{6}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{2}{3}$

۱۲۵- در یک مسئله رگرسیون خطی چندگانه با ۳ متغیر پیشگو و مشاهداتی به حجم $n = 20$ ، اطلاعات زیر حاصل شده است. اگر مقدار SST برابر با ۸۲ باشد، آنگاه مقدار آماره آزمون $H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0$ کدام است؟

مدل شامل	x_1	x_2	x_3	(x_1, x_2)	(x_1, x_3)	(x_2, x_3)	(x_1, x_2, x_3)
SSR	۱۶	۰/۱	۱۳	۱۶/۲	۳۰	۱۴	۳۲

- $\frac{32}{17}$ (۱)
 $\frac{64}{25}$ (۲)
 $\frac{56}{25}$ (۳)
 $\frac{68}{25}$ (۴)

