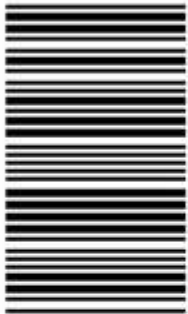


کد کنترل

730

A



730A

صبح پنجشنبه

۱۳۹۸/۳/۲۳



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۸

مجموعه آمار - کد (۱۲۰۷)

مدت پاسخ‌گویی: ۲۵۵ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۲۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضی عمومی (۲و۱)، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۳۵	۳۱	۶۵
۳	دروس تخصصی (احتمال (۲و۱)، آمار ریاضی (۲و۱)، نمونه‌گیری (۲و۱) و رگرسیون (۱))	۶۰	۶۶	۱۲۵

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و یا متخلین برابر مقررات رفتار می‌شود.

۱۳۹۸

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب با شماره داوطلبی با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره سندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سوالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سوالات و پائین پاسخنامه را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.

- 1- I would like to compliment Jaden for the course of action he recommended because I think it will ----- our problem once and for all.
1) sequence 2) speculate 3) signify 4) settle
- 2- An ----- is often expressed as a simile, as in "The football game was like a battle between gladiators."
1) endeavor 2) invasion 3) analogy 4) arena
- 3- Do you know of an alternate route we could take to ----- having to drive through the city?
1) circumvent 2) delight in 3) partake of 4) suggest
- 4- My political science professor presents her lectures in a relaxed manner using ----- rather than elaborate language.
1) loquacious 2) colloquial 3) literary 4) inflated
- 5- My uncle, a farmer, is an ----- pessimist when he discusses the weather. For example, if the sun is shining, he's sure a drought is beginning; if it's raining, he's sure his crops will be washed away.
1) initial 2) instant 3) immutable 4) interactive
- 6- The pharmaceutical company had to ----- its advertising claim regarding the healing power of its new arthritis medicine because research studies clearly indicate the medicine isn't effective.
1) repudiate 2) enhance 3) distribute 4) replicate
- 7- It's an ----- to their friends as to why the couple broke up because they seem perfect for each other.
1) interference 2) inference 3) alteration 4) enigma
- 8- Mr. Baker has decided to move to a big city because of a ----- of employment opportunities in his small hometown.
1) demonstration 2) foundation 3) trace 4) dearth

- 9- There are many good reasons for not smoking, but those having to do with health are the most -----.
- 1) passionate 2) cogent 3) paradoxical 4) accidental
- 10- ----- therapy is a psychological approach designed to help individuals change harmful thought patterns to more constructive ones.
- 1) Inherent 2) Thoughtful 3) Cognitive 4) Epidemiological

PART B: Cloze Test

Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

The earliest human artifacts showing evidence of workmanship with an artistic purpose (11) ----- the subject of some debate. It is clear that such workmanship existed some 40,000 years ago in the Upper Paleolithic era, (12) ----- it is quite possible that it began earlier. In September 2018, scientists (13) ----- the discovery of (14) ----- by *Homo sapiens*, which is estimated to be 73,000 years old, much earlier than the 43,000-year-old artifacts (15) ----- to be the earliest known modern human drawings found previously.

- 11- 1) are 2) is 3) has been 4) was
- 12- 1) as 2) when 3) since 4) although
- 13- 1) who reported 2) reported 3) having reported 4) to report
- 14- 1) known drawing the earliest 2) the earliest drawing was known
3) the earliest known drawing 4) known as the earliest drawing
- 15- 1) that understand 2) understood
3) were understood 4) they are understood

PART C: Reading Comprehension:

Directions: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

PASSAGE 1:

When someone discovers that you are writing a textbook, one (or both) of two questions will be asked. The first is "Why are you writing a book?" and the second is "How is your book different from what's out there?" The first question is fairly easy to answer. You are writing a book because you are not entirely satisfied with the available texts. The second question is harder to answer. The answer can't be put in a few sentences so, in order not to bore your audience (who may be asking the question only out of politeness), you try to say something quick and witty. It usually doesn't work.

The purpose of this book is to build theoretical statistics (as different from mathematical statistics) from the first principles of probability theory. Logical

development, proofs, ideas, themes, etc., evolve through statistical arguments. Thus, starting from the basics of probability, we develop the theory of statistical inference using techniques, definitions, and concepts that are statistical and are natural extensions and consequences of previous concepts. When this endeavor was started, we were not sure how well it would work. The final judgment of our success is, of course, left to the reader.

- 16- **How many questions will be asked?**
 1) A few 2) Two 3) only one 4) None
- 17- **The first question is -----.**
 1) vague 2) hard 3) important 4) almost easy
- 18- **The second question is -----.**
 1) harder 2) impolite 3) logical 4) natural
- 19- **To develop statistics, we start from -----.**
 1) algebra 2) basics of probability
 3) data 4) numbers
- 20- **The final judgment is left to the -----.**
 1) student 2) reader 3) college 4) teacher

PASSAGE 2:

The subject of probability theory is the foundation upon which all of statistics is built, providing a means for modeling populations, experiments, or almost anything else that could be considered a random phenomenon. Through these models, statisticians are able to draw inferences about populations, inferences based on examination of only a part of the whole.

The theory of probability has a long and rich history, dating back at least to the seventeenth century when, at the request of their friend, the Chevalier de Méré, Pascal and Fermat developed a mathematical formulation of gambling odds.

- 21- **What is the foundation of statistics?**
 1) Probability 2) Algebra 3) Analysis 4) Data
- 22- **By modeling populations, statistics is able to -----.**
 1) direct 2) solve problems
 3) draw inferences 4) make life easy
- 23- **The history of probability goes back to the -----.**
 1) 12th century 2) 14th century
 3) 17th century 4) 15th century
- 24- **Who developed a foundation for gambling?**
 1) Fisher 2) Pascal alone
 3) Fermat alone 4) Pascal and Fermat
- 25- **Who was the Chevalier de Méré?**
 1) Pearson's friend 2) Fisher's friend
 3) Pascal's friend 4) Wald's friend

PASSAGE 3:

When an experiment is performed, the realization of the experiment is an outcome in the sample space. If the experiment is performed a number of times, different outcomes may occur each time or some outcomes may repeat. This "frequency of occurrence" of an outcome can be thought of as a probability. More probable outcomes occur more frequently. If the outcomes of an experiment can be described probabilistically, we are on our way to analyzing the experiment statistically.

In this section we describe some of the basics of probability theory. We do not define probabilities in terms of frequencies but instead take the mathematically simpler axiomatic approach. As will be seen, the axiomatic approach is not concerned with the interpretations of probabilities, but is concerned only that the probabilities are defined by a function satisfying the axioms. Interpretations of the probabilities are quite another matter. The "frequency of occurrence" of an event is one example of a particular interpretation of probability. Another possible interpretation is a subjective one, where rather than thinking of probability as frequency, we can think of it as a belief in the chance of an event occurring.

- 26- **The result of an experiment is a(n) -----.**
 1) success 2) failure 3) outcome 4) sample space
- 27- **The relative frequency of an outcome can be thought as -----.**
 1) data 2) probability
 3) a small number 4) a large number
- 28- **A simple approach to defining probability is -----.**
 1) events 2) belief 3) frequency 4) axioms
- 29- **The axiomatic method of probability is used for -----.**
 1) proving 2) interpreting 3) counting 4) explaining
- 30- **Subjective probability can be thought as -----.**
 1) belief 2) chance 3) statistics 4) frequency

دروس پایه (ریاضی عمومی (۲و۱)، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۳۱- مقدار $(1 + \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5})^5 + i(1 + \sin \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5})^5$ کدام است؟ $(i^2 = -1)$

○ (۱)
 -i (۲)
 i (۳)
 ۱ (۴)

۳۲- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$ کدام است؟

- (۱) ۰
(۲) $\frac{4}{e}$
(۳) ۱
(۴) $\frac{1}{e}$

۳۳- فرض کنید دنباله (a_n) یکنوا و سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. کدام گزینه برای سری $\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1})$ درست است؟

(۱) همگرا است.

(۲) دنباله مجموع جزئی آن یکنوا است، ولی لزوماً کران دار نیست.

(۳) دنباله مجموع جزئی آن کران دار است، ولی لزوماً همگرا نیست.

(۴) لزوماً جمله عمومی آن به صفر میل نمی کند لذا همگرایی نتیجه نمی شود.

۳۴- کدام گزینه درباره تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \sin(\pi(x - [x]))$ درست است؟ ([.] نماد جزء صحیح است.)

(۱) مطلقاً انتگرال پذیر است.

(۲) پیوسته نیست.

(۳) پیوسته است، ولی مشتق پذیر نیست.

(۴) مشتق پذیر است.

۳۵- اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} (e^{-2x} - \frac{1+ax}{1+bx}) = 0$ ، آنگاه مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) ۰
(۳) ۱
(۴) ۲

۳۶- مقدار $\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{e}{3} - 1$
(۲) $\frac{e}{2} + 1$
(۳) $\frac{e}{3} + 1$
(۴) $\frac{e}{2} - 1$

۳۷- اگر a, b اعداد مثبت باشند، آنگاه طول منحنی تابع $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ بر بازه $[-b, b]$ کدام است؟

$$2a \cosh\left(\frac{b}{a}\right) \quad (۱)$$

$$2b \sinh\left(\frac{b}{a}\right) \quad (۲)$$

$$2a \sinh\left(\frac{b}{a}\right) \quad (۳)$$

$$2b \cosh\left(\frac{b}{a}\right) \quad (۴)$$

۳۸- فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته و داشته باشیم $f(0, 1) = 0$ ، $f_x(0, 1) = 1$ و

$$f_y(0, 1) = 2. \text{ مقدار } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2t, e^t)}{f(\sin 2t, \cos 2t)}$$

۰ (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

۳۹- فرض کنید $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 2x^2, y^2 \leq x \leq 2y^2\}$. مقدار $\iint_D xy e^{\frac{x^2+y^2}{xy}} dx dy$ کدام است؟

$\frac{e}{12}$ (۱)

$\frac{2e}{4}$ (۲)

$\frac{e}{4}$ (۳)

$\frac{e}{20}$ (۴)

۴۰- فرض کنید C فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $z = y + 1$ در جهت راستگرد باشد. مقدار

$$\oint_C (4z dx - 2x dy + 2x dz)$$

4π (۱)

$-2\sqrt{2}\pi$ (۲)

-4π (۳)

$2\sqrt{2}\pi$ (۴)

۴۱- فرض کنید $P \subseteq \mathbb{N}$. کدام گزاره معادل گزاره زیر است؟

$$n \notin P \Rightarrow \exists p(p \in P \wedge p \leq \sqrt{n} \wedge p \mid n)$$

$$\forall p(p \in P \vee \sqrt{n} \leq p \vee p \nmid n) \Rightarrow n \in P \quad (۱)$$

$$\forall p(p \in P \wedge p \leq \sqrt{n} \Rightarrow p \nmid n) \Rightarrow n \in P \quad (۲)$$

$$\forall p(p \in P \wedge \sqrt{n} \leq p \wedge p \nmid n) \Rightarrow n \in P \quad (۳)$$

$$\forall p(p \in P \wedge p \leq \sqrt{n} \vee p \nmid n) \Rightarrow n \in P \quad (۴)$$

۴۲- فرض کنید A و B دو مجموعه دلخواه باشند. ضرب دکارتی به X و تفاضل متقارن به Δ نمایش داده می‌شود.

ضمناً $X \setminus Y$ به منزله مکمل Y نسبت به X است. کدام گزینه درست است؟

$$(1) (A \times B) \setminus (B \times A) = (A \setminus B) \times (B \setminus A)$$

$$(2) (A \Delta B) \times (A \Delta B) = (A \times A) \Delta (B \times B)$$

$$(3) (A \setminus B) \times (A \setminus B) = (A \times A) \setminus (B \times B)$$

$$(4) (A \cap B) \times (A \cap B) = (A \times A) \cap (B \times B)$$

۴۳- فرض کنید \mathbb{Q} مجموعه اعداد گویا و X مجموعه‌ای نامتناهی باشد. کدام گزاره درست است؟

(۱) اگر $f: X \rightarrow X$ پوشا باشد، آنگاه f یک‌به‌یک است.

(۲) اگر $f: X \rightarrow X$ یک‌به‌یک باشد، آنگاه f پوشا است.

(۳) تابعی پوشا مانند $f: X \rightarrow \mathbb{Q}$ وجود دارد.

(۴) تابعی یک‌به‌یک مانند $f: X \rightarrow \mathbb{Q}$ وجود دارد.

۴۴- فرض کنید $A \cong B$ به مفهوم هم‌عدد بودن A و B و $A < B$ به مفهوم هم‌عدد بودن A با زیرمجموعه‌ای از B باشد ولی B با هیچ زیرمجموعه‌ای از A هم‌عدد نباشد. اگر $A \cong B$ و $C \cong D$ ، کدام گزاره درست است؟

$$(1) A < C \text{ اگر و فقط اگر } B < D$$

$$(2) A \cup C \cong B \cup D$$

$$(3) A \cap C \cong B \cap D$$

$$(4) A \times B \cong C \times D$$

۴۵- فرض کنید α ، β و γ اعداد اصلی نامتناهی (ترامتناهی) باشند. کدام گزینه درست است؟

$$(1) (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta^\gamma} \text{ اگر } \alpha < \beta \text{ آنگاه } \alpha^\gamma < \beta^\gamma$$

$$(2) \alpha < \beta < \gamma \text{ آنگاه } \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

۴۶- فرض کنید A و B ماتریس‌های مربعی باشند. کدام یک از گزاره‌های زیر درباره دترمینان آن‌ها نادرست است؟

$$(1) \det(AB) = \det(BA)$$

$$(2) \det(I - AB) = 0 \text{ اگر و تنها اگر } \det(I - BA) = 0$$

$$(3) \det(A + B^t) = \det(A^t + B) \text{ که در آن منظور از } A^t \text{ ترانپوز ماتریس } A \text{ است.}$$

$$(4) \det(\text{adj}(B)) = \det(B) \text{ که در آن منظور از } \text{adj}(B) \text{ الحاقی ماتریس } B \text{ است.}$$

۴۷- فرض کنید $T: V \rightarrow V$ یک عملگر خطی باشد به طوری که $\text{Im } T = \ker T$ در این صورت کدام یک از گزینه‌ها

در مورد بعد V می‌تواند صحیح باشد؟

$$(1) \dim V = 1 \quad (2) \dim V = 5 \quad (3) \dim V = 6 \quad (4) \dim V = 9$$

۴۸- فرض کنید V یک فضای برداری از بعد ۱۰ روی میدان \mathbb{F} باشد و $f, g: V \rightarrow \mathbb{F}$ دو تبدیل خطی باشند. اگر $\ker f$ و

$\ker g$ هیچ یک زیرمجموعه دیگری نباشند، در این صورت بعد $\ker f \cap \ker g$ برابر است با:

$$(1) \text{ صفر} \quad (2) 8 \quad (3) 9 \quad (4) 10$$

۴۹- تعداد ماتریس‌های $A \in M_r(\mathbb{R})$ به طوری که $A^2 = -I$ برابر است با:

$$(1) \text{ صفر} \quad (2) 1 \quad (3) 2 \quad (4) \text{ بی‌نهایت}$$

۵۰- فرض کنیم $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ مقدار $\det(I_6 + XX^T)$ کدام است؟

(۱) ۱۷

(۲) -۱۸

(۳) -۱۷

(۴) ۱۸

۵۱- اگر $A, B \subseteq \mathbb{R}$ و \bar{A}, A° به ترتیب درون و بستار A باشند، کدام گزینه درست است؟

(۱) $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$

(۲) $(A \cup B)^\circ \subseteq A^\circ \cup B^\circ$

(۳) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

(۴) $\overline{(A \setminus B)} = \bar{A} \setminus \bar{B}$

۵۲- مقدار انتگرال ریمان بالای و انتگرال ریمان پائینی تابع زیر به ترتیب کدام است؟

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{Q} \cap [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos x & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

(۱) ۱ و $\sqrt{2}$

(۲) ۱ و $2 - \sqrt{2}$

(۳) ۱ و ۱

(۴) $\sqrt{2}$ و $2 - \sqrt{2}$

۵۳- فرض کنید $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی پیوسته یکنواخت باشند و $-\infty < a < b < \infty$. کدام شرط پیوستگی

یکنواخت fg را ایجاب نمی‌کند؟

(۱) $-\infty < a < b < \infty$.

(۲) توابع f و g کراندار هستند.

(۳) حد تابع f در a و b موجود و متناهی است.

(۴) توابع f^2 و g^2 و $(f+g)^2$ پیوسته یکنواخت هستند.

۵۴- فرض کنید $A = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ و $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n}$. کدام گزینه درست است؟

(۱) هر دو سری A و B واگرا هستند.

(۲) هر دو سری A و B همگرا هستند.

(۳) سری A همگرا و سری B واگراست.

(۴) سری B همگرا و سری A واگراست.

۵۵- فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در هر نقطه ناصفر مشتق مرتبه دوم دارد به طوری که برای هر $x < 0$ ، $f'(x) < 0 < f''(x)$ و برای هر $x > 0$ ، $f'(x) > 0 > f''(x)$ کدام گزینه درست است؟
 (۱) در صفر مشتق پذیر نیست.
 (۲) در صفر مشتق پذیر است و $f'(0) < 0$.
 (۳) در صفر مشتق پذیر است و $f'(0) = 0$.
 (۴) در صفر مشتق پذیر است و $f'(0) > 0$.

۵۶- در یک دستگاه ممیز شناور نرمال شده در مبنای ۲، هر عدد حقیقی به صورت $\pm d_1 d_2 d_3 \dots \times 2^{\pm d_4 d_5}$ نمایش داده می‌شود که d_i ها ارقام دودویی هستند. فرض کنید که در نمایش عدد حقیقی، ارقام اضافی بریده می‌شوند. کوچک‌ترین عدد مثبت قابل نمایش و روند عدد یک به ترتیب برابرند با

(۱) 2^{-2} و 2^{-4}

(۲) 2^{-2} و 2^{-6}

(۳) 2^{-3} و 2^{-4}

(۴) 2^{-3} و 2^{-6}

۵۷- در روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن برای درون‌یابی داده‌های جدول زیر، اگر $f[1, 2, 3] = a - 1$ ، آنگاه مقدار a کدام است؟

x_i	-۱	۱	۲	۳
f_i	۲	۱	-۱	۰

(۱) ۱

(۲) $\frac{5}{2}$

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) $\frac{1}{2}$

۵۸- تخمین $f(x) = \cos 4x$ در فاصله $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ با توابع تکه‌ای خطی مدنظر است. طول زیر بازه‌ها با طول برابر در این

بازه حداکثر چقدر باشد تا کران بالای خطای برشی تخمین در این بازه کم‌تر یا مساوی با 2×10^{-6} باشد؟

(۱) ۰٫۰۰۵

(۲) ۰٫۰۵

(۳) ۰٫۰۱

(۴) ۰٫۰۰۱

۵۹- اگر A یک ماتریس $m \times n$ با ستون‌های مستقل خطی باشد، آن‌گاه x^* جواب مسأله $t = \min \|A^T Ax - b\|_p$

...

(۱) یکتا نیست و $t \neq 0$

(۲) یکتاست و $t = 0$

(۳) یکتا نیست و $t = 0$

(۴) یکتاست و $t \neq 0$

۶۰- مقادیر A و B را برای تخمین انتگرال $\int_0^\pi f(x) dx \approx Af(0) + Bf(\pi)$ کدام باشد تا تخمین به دست آمده برای

توابع به صورت $a + b \cos x$ ، به‌ازای همه مقادیر a و b ، همان جواب دقیق انتگرال باشد؟

(۱) $A = B = \pi$

(۲) $B = 0, A = \pi$

(۳) $A = B = \frac{\pi}{2}$

(۴) $B = \pi, A = 0$

۶۱- سه عدد را با میانگین μ و واریانس σ^2 در نظر بگیرید. از کوچک‌ترین داده سه واحد کم می‌کنیم، میانگین و

واریانس داده‌های جدید η و τ^2 می‌شود. در این صورت کدام مورد درست است؟

(۱) $\tau^2 < \sigma^2$ و $\eta < \mu$

(۲) $\tau^2 > \sigma^2$ و $\eta > \mu$

(۳) $\tau^2 > \sigma^2$ و $\eta < \mu$

(۴) $\tau^2 < \sigma^2$ و $\eta > \mu$

۶۲- سه نفر A و B و C سوار یک آسانسور هستند که می‌توانند در یکی از سه طبقه ساختمان پیاده شوند. فرض کنید

هر فرد مستقل از دیگران پیاده می‌شود و شانس پیاده شدن هر شخص در هر طبقه‌ای یکسان است. احتمال اینکه

در هر طبقه دقیقاً یک نفر پیاده شود کدام است؟

(۱) $\frac{2}{9}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{4}{9}$

(۴) $\frac{1}{6}$

۶۳- ۵ مهره ناهم‌رنگ را به تصادف در ۵ ظرف به شماره‌های ۱ تا ۵ می‌ریزیم. احتمال اینکه در ظرف‌های با شماره فرد

فقط یک مهره قرار گیرد کدام است؟

(۱) $\frac{48}{625}$

(۲) $\frac{36}{625}$

(۳) $\frac{32}{225}$

(۴) $\frac{32}{125}$

۶۴- عددهای سه رقمی که رقم های آن از مجموعه $\{1, \dots, 9\}$ است را در نظر بگیرید. چه تعداد از این عددها دو رقم پی در پی یکسان ندارند؟

(۱) ۵۶۷

(۲) ۵۷۶

(۳) ۵۳۷

(۴) ۵۷۳

۶۵- احتمال برنده شدن شخصی در یک بازی شانسی $\frac{9}{19}$ است. احتمال این که تعداد دفعات لازم برای برنده شدن این شخص عددی فرد باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{10}{19}$

(۲) $\frac{10}{29}$

(۳) $\frac{9}{19}$

(۴) $\frac{19}{29}$

دروس تخصصی (احتمال (۲و۱)، آمار ریاضی (۲و۱)، نمونه گیری (۲و۱) و رگرسیون (۱) :

۶۶- فرض کنید $Z \sim N(0, 1)$. احتمال اینکه معادله درجه دو $t^2 + 2tZ + 1 = 0$ ریشه حقیقی داشته باشد، کدام است؟ ($\Phi(\cdot)$ نمایانگر تابع توزیع نرمال استاندارد است.)

(۱) $\Phi(1)$

(۲) $1 - \Phi(1)$

(۳) $2\Phi(1) - 1$

(۴) $2(1 - \Phi(1))$

۶۷- فرض کنید $X \sim U(-a, a)$ باشد که در آن $a > 1$ و $P(|X| < 1) = P(|X| > \frac{1}{4})$ ، مقدار $\text{Var}(X)$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{4}$

(۲) $\frac{5}{12}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۴) $\frac{1}{4}$

۶۸- یک جفت تاس سالم را n بار پرتاب می‌کنیم. فرض کنید X تعداد دفعاتی باشد که خال مشاهده شده تاس اول بیشتر از تاس دوم باشد. توزیع X کدام است؟

(۱) $\text{Bin}(n, \frac{1}{36})$

(۲) $\text{Bin}(n, \frac{1}{6})$

(۳) $\text{Bin}(n, \frac{15}{36})$

(۴) $\text{Bin}(n, \frac{5}{6})$

۶۹- فرض کنید X یک متغیر تصادفی باتابع چگالی احتمال زیر باشد. توزیع $Y = \text{Ln}(\frac{X}{\beta})$ کدام است؟

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}}; x \geq \beta, \alpha > 0, \beta > 0$$

(۱) $\text{Beta}(1, \alpha)$

(۲) $\text{Beta}(\alpha, 1)$

(۳) $\text{Pa}(\alpha, 1)$

(۴) $\text{Exp}(\alpha)$

۷۰- فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال زیر باشد. اگر $Y = [X]I_{(X>1)}$ مقدار $P(Y=0)$.

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$$

کدام است؟ ($[t]$ نمایانگر جزء صحیح t است.)

(۱) $e-2$

(۲) $\frac{e-1}{2}$

(۳) $\frac{1-e^{-1}}{2}$

(۴) $1-\frac{1}{2}e^{-1}$

۷۱- فرض کنید $Z \sim N(0, 1)$ باشد. برای اینکه امید ریاضی مربع فاصله اقلیدسی بین دو نقطه $(a, 1)$ و $(Z, 0)$ در صفحه مختصات کمترین مقدار را داشته باشد، مقدار ثابت a کدام است؟

(۱) -1

(۲) صفر

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) 1

۷۲- فرض کنید $X \sim N(0, 1)$ و Φ تابع توزیع X باشند. مقدار $E[\ln \Phi(X)]$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) $\frac{1}{2}$

۷۳- متغیر تصادفی گسسته X با مقادیر ممکن صحیح نامنفی دارای تابع مولد احتمال $G(t) = e^{2(t-1)}$ است. مقدار $P(X \geq 1)$ کدام است؟

(۱) e^{-2}

(۲) e^{-1}

(۳) $1 - e^{-2}$

(۴) $1 - e^{-1}$

۷۴- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع تجمعی F باشد. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y = F^2(X)$ در بازه $(0, 1)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$

(۲) $\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}$

(۳) $y^{\frac{1}{2}}$

(۴) $\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}$

۷۵- فرض کنید $X \sim U(-1, 1)$ و $Y = \max(0, X)$. مقدار تابع توزیع تجمعی Y برای $0 < y \leq 1$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{y}{2}$

(۴) $\frac{y+1}{2}$

۷۶- دو مهره از ظرفی که شامل R مهره قرمز و $N-R$ مهره سفید است به تصادف، یک به یک و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A_i پیشامد مشاهده مهره قرمز در انتخاب i ام ($i=1,2$) باشد و $X_i = I_{A_i}$ (تابع نشانگر پیشامد A_i). ضریب همبستگی X_1 و X_2 کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{N}$

(۲) $\frac{1}{N}$

(۳) $-\frac{1}{N-1}$

(۴) $\frac{1}{N-1}$

۷۷- فرض کنید X_1, X_2 یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد باشد. مقدار $E[e^{\frac{1}{2}X_1 X_2}]$ کدام است؟

(۱) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(۴) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

۷۸- فرض کنید X_1, X_2 یک نمونه تصادفی از توزیعی با شرط وجودی تابع مولد گشتاور و $E(X_1^k) = \frac{1}{5} + 5^{k-1}$.

باشد. مقدار $P(X_1 + X_2 = 1)$ کدام است؟ $k=1,2,\dots$

(۱) $\frac{6}{25}$

(۲) $\frac{8}{25}$

(۳) $\frac{12}{25}$

(۴) $\frac{18}{25}$

۷۹- فرض کنید X_1, \dots, X_{10} یک نمونه تصادفی از توزیعی با شرط $P(X_1 = 2) = 1 - P(X_1 = 1) = 1 - p$ باشد. مقدار

$$P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 10\right) \text{ کدام است؟}$$

(۱) p^{10}

(۲) $1 - p^{10}$

(۳) $(1 - p)^{10}$

(۴) $1 - (1 - p)^{10}$

۸۰- فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونه تصادفی از توزیع $U(0, 1)$ باشند. اگر

$$Y = I(X_1 \geq \frac{1}{4}) + I(X_2 \geq \frac{1}{3}) + I(X_3 \geq \frac{1}{4})$$

مقدار $\text{Var}(Y)$ کدام است؟ (I نمایانگر تابع نشانگر است.)

(۱) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{13}{3}$

(۳) $\frac{95}{144}$

(۴) $\frac{23}{12}$

۸۱- فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع چگالی احتمال زیر باشند. احتمال

$$f(x) = \frac{x+1}{2}, -1 < x < 1$$

اینکه دقیقاً چهار مشاهده از صفر بزرگتر باشند کدام است؟

(۱) $\frac{1215}{4096}$

(۲) $\frac{486}{2048}$

(۳) $\frac{243}{2048}$

(۴) $\frac{135}{4096}$

۸۲- فرض کنید X_1, X_2, \dots دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع مشترک پواسن با پارامتر $\lambda = 1$

باشند. قرار دهید $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ که در آن N متغیری تصادفی مستقل از X_i ها باشد به طوری که مقادیر صحیح و نامنفی اختیار می‌کند. مقدار $\text{Var}(S_N)$ کدام است؟

(۱) $\text{Var}(N) + E(N)$

(۲) $\text{Var}(N) + E(N^2)$

(۳) $\text{Var}(N) + E^2(N)$

(۴) $\text{Var}(N) + 2E(N)$

۸۳- فرض کنید $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$ و $P[X_n = 0] = P[X_n = 1]$. مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n = 0]$ کدام است؟

(۱) e^{-2}

(۲) e^{-1}

(۳) $\frac{e^{-2}}{2}$

(۴) $\frac{e^{-1}}{2}$

۸۴- فرض کنید X_1, X_2, \dots یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع یکسان $U(1, 2)$ باشند. اگر

$$H_n = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{-1} \right)^{-1} \text{ و } H_n \xrightarrow{p} c \text{ مقدار } c \text{ کدام است؟}$$

(۱) $-\ln 2$

(۲) $\ln 2$

(۳) $\frac{2}{\ln 2}$

(۴) $\frac{1}{\ln 2}$

۸۵- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. آماره بسنده مینیمال برای

$$f_{\theta}(x) = \frac{\theta}{(1+x)^{1+\theta}}, \quad x > 0, \quad \theta > 0$$

پارامتر θ کدام است؟

(۱) $\sum_{i=1}^n (1+X_i)$

(۲) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+X_i}$

(۳) $\sum_{i=1}^n \ln X_i$

(۴) $\sum_{i=1}^n \ln(1+X_i)$

۸۶- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_{\theta_1, \theta_2}(x) = \begin{cases} (\theta_1 + \theta_2)^{-1} \exp\left\{-\frac{x}{\theta_1}\right\} & x > 0 \\ (\theta_1 + \theta_2)^{-1} \exp\left\{\frac{x}{\theta_2}\right\} & x < 0 \end{cases} \quad \theta_i > 0, i = 1, 2$$

آماره بسنده کامل برای (θ_1, θ_2) کدام است؟ (منظور از I تابع نشانگر است.)

$$\sum_{i=1}^n X_i \quad (۱)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i I(X_i > 0), \sum_{i=1}^n X_i I(X_i < 0) \right) \quad (۲)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 I(X_i > 0), \sum_{i=1}^n X_i^2 I(X_i < 0) \right) \quad (۳)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n e^{X_i} I(X_i < 0), \sum_{i=1}^n e^{X_i} I(X_i > 0) \right) \quad (۴)$$

۸۷- فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی مستقل و X_i دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{\theta}{i}$ باشد. آماره بسنده

کامل برای θ کدام است؟

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i} \quad (۱)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \quad (۲)$$

$$\sum_{i=1}^n i X_i \quad (۳)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{i}{X_i} \quad (۴)$$

۸۸- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد. براساس یافته X «برآورد ناریب صفر» کدام است؟

$$f_p(x) = \begin{cases} q & x = 1 \\ p^x q & x = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (q = 1 - p)$$

$$h(x) = -h(1)(x - 2) \quad (1)$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x = 2 \\ -h(1)x & x = 3, 4, \dots \end{cases} \quad (2)$$

$$h(x) = h(1)(x - 2) \quad (3)$$

$$h(x) = h(1)x \quad (4)$$

۸۹- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآورد گشتاوری پارامتر θ کدام است؟

$$f_\theta(x) = \frac{2}{\pi\theta} \exp\left\{-\frac{x^2}{\pi\theta^2}\right\}, \quad x \geq 0, \quad \theta > 0$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (1)$$

$$\frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^n X_i \quad (2)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (3)$$

$$\frac{2}{n\pi} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (4)$$

۹۰- فرض کنید X دارای توزیع نمایی با میانگین θ و Y مستقل از X دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta}$ باشد.

برآوردگر ماکزیمم درستنمایی (MLE) پارامتر θ کدام است؟ ($\theta > 0$)

$$\frac{X}{Y} \quad (1)$$

$$\frac{Y}{X} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{X}{Y}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{Y}{X}} \quad (4)$$

۹۱- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. براساس یافته‌های این نمونه، برآورد UMVU پارامتر θ^2 کدام است؟

$$f_{\theta}(x) = \frac{2}{\pi\theta} \exp\left\{-\frac{x^2}{\pi\theta^2}\right\}, \quad x \geq 0, \quad \theta > 0$$

$$\frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (۱)$$

$$\frac{n\pi}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (۲)$$

$$\frac{n}{2\pi} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (۳)$$

$$\frac{2}{n\pi} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (۴)$$

۹۲- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $\Gamma(\alpha, 1)$ با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآوردگر UMVU برای پارامتر α^n کدام است؟

$$f_{\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x}, \quad x > 0, \quad \alpha > 0$$

$$\left\{ \prod_{i=1}^n X_i \right\}^{\frac{1}{n}} \quad (۱)$$

$$\prod_{i=1}^n X_i \quad (۲)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (۳)$$

$$\sum_{i=1}^n \ln X_i \quad (۴)$$

۹۳- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. کران پایین کرامر - رانو برای واریانس برآوردگر نارایب پارامتر $\gamma(\theta) = \frac{1}{\theta}$ کدام است؟

$$f_{\theta}(x) = \frac{\theta^{\tau}}{1+\theta} (1+x)e^{-\theta x}, \quad x > 0, \theta > 0$$

$$\frac{\theta^{\tau}}{n} \quad (1)$$

$$\frac{\theta^{\tau}(1+\theta)^{\tau}}{n(\theta^{\tau} + \tau\theta + \tau)} \quad (2)$$

$$\frac{(1+\theta)^{\tau}}{n(\theta^{\tau} + \tau\theta + \tau)} \quad (3)$$

$$\frac{(1+\theta)^{\tau}}{n\theta^{\tau}(\theta^{\tau} + \tau\theta + \tau)} \quad (4)$$

۹۴- فرض کنید X_1, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت روی فاصله $(0, \theta)$ باشد و $X_{(1)}$ و $X_{(n)}$ به ترتیب کوچکترین و بزرگترین آماره ترتیبی این نمونه باشند. مقدار $E(X_{(1)} | X_{(n)})$ کدام است؟

$$\frac{nX_{(n)}}{n+1} \quad (1)$$

$$\frac{1}{n+1} \quad (2)$$

$$\frac{X_{(n)}}{n} \quad (3)$$

$$\frac{X_{(n)}}{n+1} \quad (4)$$

۹۵- فرض کنید X_1, X_2 نمونه‌ای تصادفی از $N(\theta, 1)$ باشد. ضریب فاصله اطمینان $(\min\{X_1, X_2\}, \max\{X_1, X_2\})$ کدام است؟

$$\frac{3}{8} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

۹۶- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد. تابع آزمون پرتوان ترین آزمون اندازه $\alpha = 0.5$ برای

آزمون فرض $H_0: \theta = \frac{3}{4}$ در برابر $H_1: \theta = \frac{4}{5}$ کدام است؟

x	۱	۲	۳
$f_{\theta}(x)$	$1-\theta$	$1-\theta$	$2\theta-1$

$\frac{1}{2} < \theta < 1$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x=1 \\ \frac{1}{2} & x=2, 3 \\ 0 & x=2 \end{cases} \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 & x=3 \\ 0 & x=1, 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x=1, 2 \\ 0 & x=3 \end{cases} \quad (2) \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 & x=2 \\ \frac{1}{2} & x=3 \\ 0 & x=1 \end{cases} \quad (3)$$

۹۷- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال زیر باشد. تابع آزمون به روش آزمون نسبت درستنمایی

برای آزمون $H_0: \theta = \theta_0$ در مقابل $H_1: \theta = \theta_1$ در سطح $\alpha = 0.1$ کدام است؟

	x_1	x_2	x_3	x_4
$f_{\theta_0}(x)$	0	0.1	0.7	0.2
$f_{\theta_1}(x)$	0.05	0.05	0.8	0.1

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} & x = x_1, x_3 \\ 0 & x = x_2, x_4 \end{cases} \quad (2) \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 & x = x_1 \\ \frac{6}{7} & x = x_3 \\ 0 & x = x_2, x_4 \end{cases} \quad (1)$$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & x = x_3 \\ \frac{1}{7} & x = x_1 \\ 0 & x = x_2, x_4 \end{cases} \quad (4) \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 & x = x_1 \\ \frac{1}{7} & x = x_3 \\ 0 & x = x_2, x_4 \end{cases} \quad (3)$$

۹۸- فرض کنید X_1, X_2 یک نمونه تصادفی از توزیع $U(0, \theta)$ باشد. به ازای چه مقدار $c (> 1)$ بازه (R, cR) یک فاصله اطمینان $(1 - \alpha)$ ۱۰۰ درصد برای θ است که در آن R برد نمونه است؟

$$(1) \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha}}{\alpha}$$

$$(2) \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha}}{\alpha}$$

$$(3) \frac{1 - \sqrt{\alpha}}{1 - \alpha}$$

$$(4) \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{1 - \alpha}$$

۹۹- از کیسه‌ای شامل ۵ مهره که θ مهره آن سفید است، یک نمونه تصادفی دوتایی بدون جایگذاری انتخاب و یک مهره سفید مشاهده می‌شود. اگر ناحیه رد برای آزمون $H_0: \theta = 1$ در مقابل $H_1: \theta = 2$ به صورت $X \geq c$ باشد که در آن X تعداد مهره‌های سفید در نمونه است، پی مقدار (p-value) آزمون کدام است؟

$$(1) 0,3$$

$$(2) 0,4$$

$$(3) 0,5$$

$$(4) 0,6$$

۱۰۰- فرض کنید X یک تک مشاهده از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. ناحیه رد آزمون به روش نسبت درستنمایی برای آزمون فرض $H_0: \theta = \theta_0$ در مقابل $H_1: \theta = \theta_1$ که $\theta_0 > \theta_1$ ، کدام است؟

$$f_{\theta}(x) = 2\theta x + (1 - \theta), 0 < x < 1, \theta \in (-1, 1)$$

$$(1) x < c$$

$$(2) x > c$$

$$(3) x < c_1 \text{ یا } x > c_2$$

$$(4) c_1 < x < c_2$$

۱۰۱- فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع $U(0, \theta)$ باشد. اگر ناحیه رد آزمون فرض $H_0: 3 \leq \theta \leq 4$ در مقابل فرض $\theta > 4$ یا $H_1: \theta < 3$ به صورت $X_{(n)} < 2/4$ یا $X_{(n)} > 4$ باشد، اندازه آزمون کدام است؟

$$(X_{(n)} = \text{Max}(X_1, \dots, X_n))$$

$$(1) (0,6)^n$$

$$(2) (0,8)^n$$

$$(3) 1 - (0,6)^n$$

$$(4) 1 - (0,8)^n$$

۱۰۲- براساس تک مشاهده X از تابع چگالی احتمال f ، توان پرتوان ترین آزمون در سطح $\alpha = 0.01$ برای آزمون فرض

$$H_0: f(x) = \frac{3}{64}x^2, 0 \leq x \leq 4 \quad \text{در مقابل} \quad H_1: f(x) = \frac{3}{16}\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4$$

(۱) ۰/۱

(۲) ۰/۰۱

(۳) ۰/۹

(۴) ۰/۹۹

۱۰۳- فرض کنید X یک تک مشاهده از توزیع $P(\theta)$ با تابع احتمال زیر باشد. ناحیه رد آزمون به روش نسبت

درست‌نمایی در سطح α برای آزمون $H_0: \theta = 2$ در مقابل $H_1: \theta \neq 2$ کدام است؟

$$f_{\theta}(x) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots, \theta > 0$$

(۱) $\left(\frac{2e}{x}\right)^x \leq a$

(۲) $\frac{(2e)^x}{x} \leq a$

(۳) $\left(\frac{2e}{x}\right)^x \geq b$

(۴) $\frac{(2e)^x}{x} \leq a$ یا $\frac{(2e)^x}{x} \geq b$

۱۰۴- اگر در جامعه‌ای به حجم N ، دقت نسبی نمونه‌گیری تصادفی ساده با جایگذاری نسبت به نمونه‌گیری تصادفی

ساده بدون جایگذاری در برآورد تعداد کل اعضای جامعه برابر با a ($a < 1$) باشد، اندازه حجم نمونه کدام است؟

(۱) $(1-a)N + a$

(۲) $(1-a)N - a$

(۳) $\frac{(1-a)N + 1}{a}$

(۴) $\frac{(1-a)N - 1}{a}$

۱۰۵- در نمونه‌گیری خوشه‌ای یک مرحله‌ای وقتی حجم خوشه‌ها برابر باشند دقت نمونه‌گیری افزایش می‌یابد، هرگاه

خوشه‌بندی به گونه‌ای باشد که ...

(۱) حجم خوشه‌ها بزرگ شود.

(۲) پراکندگی داخل خوشه‌ها کاهش یابد.

(۳) ضریب همبستگی داخل خوشه‌ها کوچک شود.

(۴) قدرمطلق ضریب همبستگی داخل خوشه‌ها بزرگ شود.

۱۰۶- جامعه‌ای بسیار بزرگ داریم، اگر ضریب تغییرات جامعه برابر ۲ باشد، حجم نمونه لازم در طرح نمونه‌گیری تصادفی ساده برای آنکه با احتمال ۰/۹۵ حداکثر خطای نسبی برآوردگر میانگین جامعه برابر ۰/۵ باشد، کدام است؟ ($Z_{0.975} = 2$)

۸ (۱)

۱۶ (۲)

۳۲ (۳)

۶۴ (۴)

۱۰۷- می‌خواهیم متوسط میزان سپرده‌گذاری مشتریان یک بانک با ۱۰۰۰ مشتری را برآورد کنیم. به این منظور ۹ مشتری به روش سیستماتیک انتخاب می‌شود. مجموع میزان سپرده‌گذاری مشتریان منتخب ۵۰ میلیون تومان است. برآورد ناریب میانگین میزان سپرده‌گذاری (برحسب میلیون تومان) در این بانک تا ۳ رقم اعشار کدام است؟

۵/۵۵۲ (۱)

۵/۵۵۴ (۲)

۵/۵۵۶ (۳)

۵/۵۵۰ (۴)

۱۰۸- برای برآورد «تعداد افراد بالای ۵۰ سال» در بین کارکنان ادارات یک شهر که دارای ۲۰۰۰ کارمند است و در ۵۰ اداره مختلف کار می‌کنند، به تصادف و با احتمالاتی متناسب با تعداد کارکنان هر اداره، ۴ تا از ادارات را به شیوه‌ای جایگزینی انتخاب کرده‌ایم که مشخصات آن‌ها به شرح جدول زیر است. براساس این نتایج پارامتر مورد نظر چقدر برآورد می‌شود؟

تعداد کارکنان ادارات نمونه	۵۰	۱۰۰	۶۰	۸۰
تعداد افراد بالای ۵۰ سال آن‌ها	۲۵	۲۵	۱۵	۲۰

۵۰۰ (۱)

۶۲۵ (۲)

۶۷۵ (۳)

۷۵۰ (۴)

۱۰۹- جامعه‌ای شامل سه طبقه است، حجم طبقه دوم نصف حجم هر یک از طبقات دیگر است. هزینه نمونه‌گیری برای هر عضو طبقه سوم، چهار برابر این هزینه در هر یک از طبقات دیگر است. همچنین انحراف معیار صفت موردنظر در طبقه اول نصف هر یک از دیگر طبقات است. اگر هزینه نمونه‌گیری خطی باشد، بهترین حجم نمونه برای طبقات کدام است؟ (n_1 ، n_2 و n_3 حجم نمونه در طبقات هستند).

$$n_1 = n_2 = n_3 \quad (۱)$$

$$n_1 = n_3 \text{ و } n_2 = \frac{n_1}{2} \quad (۲)$$

$$n_1 = n_2 \text{ و } n_3 = 2n_1 \quad (۳)$$

$$n_2 = 2n_3 \text{ و } n_1 = 3n_3 \quad (۴)$$

۱۱۰- برای برآورد «تعداد کل اتومبیل‌ها» و «تعداد کل اتومبیل‌های گازسوز» فعال در یک منطقه بسته، همه اتومبیل‌هایی را که طی مدت مشخص در پمپ‌های گاز این منطقه سوخت‌گیری نموده‌اند ۲۰۰ خودرو بوده است. اگر پس از مدتی کوتاه در یک نمونه تصادفی ۱۰۰۰ تایی از اتومبیل‌ها، مشخص شود ۱۵۰ تا از آن‌ها گازسوز بوده و علاوه بر آن ۲۵ تا از آن‌ها نیز در همان مدت مشخص سوخت‌گیری نموده‌اند. برآوردهای موردنظر کدام است؟

(۱) ۸۰۰۰ اتومبیل که ۱۲۰۰ تا از آن‌ها گازسوز هستند.

(۲) ۸۰۰۰ اتومبیل که ۲۲۵۰ تا از آن‌ها گازسوز هستند.

(۳) ۱۵۰۰۰ اتومبیل که ۳۰۰۰ تا از آن‌ها گازسوز هستند.

(۴) ۱۵۰۰۰ اتومبیل که ۴۷۵۰ تا از آن‌ها گازسوز هستند.

۱۱۱- جامعه‌ای به حجم N با مقادیر y_1, y_2, \dots, y_N داریم. فرض کنید نام نفر اول جامعه به اشتباه دو مرتبه در چارچوب آن ثبت شده باشد. یک نمونه تصادفی ساده به حجم n از روی چارچوب انتخاب می‌شود. در این صورت ارببی میانگین معمولی مشاهدات نمونه برای میانگین جامعه \bar{y}_N کدام است؟

(۱) صفر

$$(۲) \frac{y_1 - \bar{y}_N}{n}$$

$$(۳) \frac{y_1 - \bar{y}_N}{N+1}$$

$$(۴) \frac{n}{N}(y_1 - \bar{y}_N)$$

۱۱۲- فرض کنید در جامعه‌ای شامل $N = 12b$ (b عددی طبیعی است) عضو، تنها نفرات مضرب ۳ دارای صفت مورد بررسی باشند. اگر از یک نمونه سیستماتیک به حجم ۴ برای برآورد نسبت این صفت استفاده شود، واریانس برآوردگر نسبت کدام است؟

$$(۱) \frac{2b}{9}$$

$$(۲) \frac{2}{9}$$

$$(۳) \frac{4b}{9}$$

$$(۴) \frac{4}{9}$$

۱۱۳- برای برآورد میانگین جامعه در نمونه‌گیری تصادفی ساده با استفاده از یک صفت کمکی که با صفت اصلی دارای ارتباط خطی مستقیم است، همه عبارات زیر صحیح‌اند، به جز:

(۱) دقت برآوردگر رگرسیونی از نسبتی کمتر نیست.

(۲) دقت برآوردگر رگرسیونی از میانگین نمونه کمتر نیست.

(۳) برآوردگر نسبتی همواره دقیق‌تر از میانگین نمونه است.

(۴) وقتی برآوردگر نسبتی به دقت رگرسیونی است که خط رگرسیون صفت اصلی به کمکی از مبدا بگذرد.

۱۱۴- فرض کنید لامپ‌های روشنایی در جعبه‌های ۱۰۰ تایی به بازار عرضه می‌شود. هر محموله لامپ شامل ۱۰۰۰ جعبه است. به منظور کنترل کیفیت یک محموله، ۱۰ جعبه انتخاب شده و لامپ‌های آن تماماً بازرسی می‌شوند. اگر

P_i و Q_i به ترتیب نسبت لامپ‌های معیوب و سالم در جعبه i ام باشند و داشته باشیم $\sum_{i=1}^{10} P_i = 9/9$ و

برآورد واریانس برآورد کننده نسبت لامپ‌های معیوب کدام است؟ $\sum_{i=1}^{10} P_i Q_i = 0.9$

(۱) ۰/۱

(۲) ۰/۰۱

(۳) ۰/۰۰۱

(۴) ۰/۰۰۰۱

۱۱۵- در نمونه‌گیری تصادفی ساده با جایگذاری به حجم n از جامعه‌ای به حجم N ، اگر بدانیم عنصر k ام حداقل یک بار در نمونه ظاهر شده است، احتمال انتخاب نشدن عنصر k ام کدام است؟

$$\frac{(1 - \frac{1}{N})^n - (1 - \frac{1}{N})^{2n}}{(1 - \frac{1}{N})^n} \quad (1)$$

$$\frac{(1 - \frac{1}{N})^n - (1 - \frac{2}{N})^n}{1 - (1 - \frac{1}{N})^n} \quad (2)$$

$$1 - (1 - \frac{1}{N})^{n-1} \quad (3)$$

$$(1 - \frac{1}{N-1})^n \quad (4)$$

۱۱۶- اگر $\hat{\epsilon}_i$ باقی‌مانده برازش رگرسیون چندگانه به روش کمترین توان‌های دوم باشد، در این صورت کدام مورد

درخصوص $\sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_i$ درست است؟

(۱) همواره مثبت است.

(۲) همواره منفی است.

(۳) همواره مساوی صفر است.

(۴) در صورتی که رگرسیون دارای عرض از مبدأ باشد، برابر صفر است.

۱۱۷- در مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ، $i = 1, \dots, n$ ، فرض کنید $S_y^2 = 400$ ، $S_x^2 = 25$ و $\hat{\beta} = 0.2$ است. ضریب همبستگی بین x و y کدام است؟

(۱) ۰/۵

(۲) ۰/۲

(۳) ۰/۰۵

(۴) ۰/۰۲

۱۱۸- در یک مطالعه آماری رابطه بین x و y یک رابطه خطی به صورت $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ، $i = 1, \dots, n$ فرض شده است. اگر براساس اطلاعات نمونه، این رابطه به صورت $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ برازش شده باشد به طوری که

$$\text{مقدار ضریب همبستگی نمونه } (r) \text{ کدام است؟} \quad \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) با این اطلاعات نمی توان مقدار r را محاسبه نمود.

۱۱۹- در یک مطالعه آماری رابطه بین x و y ، $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ، $i = 1, \dots, n$ فرض شده است. براساس یک نمونه تصادفی $n = 11$ تایی برازش مدل به صورت $\hat{y} = 5 + 0.7x$ است. نتایج نشان می دهند ۶۴ درصد از تغییرات y توسط x قابل توضیح است، در این صورت مقدار آماره آزمون تی برای آزمون فرض $H_0: \beta_1 = 0$ در مقابل $H_1: \beta_1 \neq 0$ کدام است؟

(۱) ۴

(۲) -۴

(۳) ۳/۲

(۴) -۳/۲

۱۲۰- مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ، $i = 1, \dots, n$ که در آن جمله ε_i ها ناهمبسته با میانگین صفر و

واریانس ثابت σ^2 هستند را در نظر بگیرید. اگر مقادیر x نامنفی باشند، کدام مورد صحیح است؟

(۱) در مورد همبستگی برآوردگرهای کمترین توان های دوم β_0 و β_1 نمی توان نظر داد.

(۲) برآوردگرهای کمترین توان های دوم β_0 و β_1 ناهمبسته هستند.

(۳) برآوردگرهای کمترین توان های دوم β_0 و β_1 همبسته مثبت هستند.

(۴) برآوردگرهای کمترین توان های دوم β_0 و β_1 همبسته منفی هستند.

۱۲۱- در یک مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، که در آن ε_i ها ناهمبسته و دارای میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند. اگر $\hat{\beta}$ برآوردگر حداقل مربعات خطا و b هر برآوردگر نارایب خطی دیگر برای β

باشند، کوواریانس بین b و $\hat{\beta}$ کدام است؟ $(\bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2)$

$$\frac{\sigma^2}{n} \quad (۲)$$

$$\frac{\sigma^2}{n x^2} \quad (۱)$$

$$\text{صفر} \quad (۴)$$

$$\frac{\bar{x}}{x^2} \sigma^2 \quad (۳)$$

۱۲۲- مدل رگرسیون خطی $y = X\beta + \varepsilon$ را که در آن X یک ماتریس $n \times n$ و $\text{rank}(X) = n$ است، در نظر بگیرید. برآورد حداقل توان‌های دوم β ($\hat{\beta}$) کدام است؟

$$X'y \quad (۱)$$

$$X^{-1}y \quad (۲)$$

$$(X'X)^{-1}y \quad (۳)$$

$$X(X'X)^{-1}X'y \quad (۴)$$

۱۲۳- مدل رگرسیون خطی $y = X\beta + \varepsilon$ را که در آن X دارای بعد $(n > p)n \times p$ و بردار ε دارای میانگین صفر و

ماتریس کوواریانس $\sigma^2 I$ است، در نظر بگیرید. میانگین حسابی واریانس $\hat{\varepsilon}_i$ ها برای $i = 1, \dots, n$ کدام است؟

$$\frac{\sigma^2}{n} \quad (۱)$$

$$\frac{p}{n} \sigma^2 \quad (۲)$$

$$\left(1 - \frac{p}{n}\right) \sigma^2 \quad (۳)$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sigma^2 \quad (۴)$$

۱۲۴- اگر در مدل رگرسیون خطی $y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \varepsilon_i$ ، $i = 1, 2, 3, 4$ داشته باشیم:

$$y = [0, 1, -1, 2]' \quad \text{و} \quad \hat{\beta}' x' = \left[-\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right]$$

$$\frac{11}{15} \quad (۱)$$

$$\frac{8}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{7}{15} \quad (۴)$$

۱۳۵- در تحلیل داده‌هایی با $n = ۲۱$ مشاهده مدل رگرسیون خطی زیر به داده‌ها برازش شده است و مقدار ضریب تعیین $۰/۸۵$ به دست آمد. همچنین با برازش مدلی با x_1 ، x_2 و عرض از مبدأ، مقدار ضریب تعیین $۰/۴۳$ محاسبه گردید. مقدار آماره آزمون برای آزمون فرض $H_0: \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = 0$ کدام است؟

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i1}^2 + \beta_4 x_{i2}^2 + \beta_5 x_{i1} x_{i2} + \varepsilon_i$$

(۱) ۸/۴

(۲) ۱۰/۴۷

(۳) ۱۴

(۴) ۲۸

