



۱ عدد $2^{2k} + 1$ به ازای کدام یک از مقادیر k ، عدد اول نیست؟

$$2^{2k} + 1 = 2^{2 \times 3} + 1 = 2^6 + 1 = 64 + 1 = 65$$

۲ به ازای کدام عدد طبیعی a ، عبارت مقابل عدد اول است؟

$$2a^2 + 1$$

$$2a^2 + 1 = 2 \times 3^2 + 1 = 2 \times 9 + 1 = 19$$

۳ تعداد همه‌ی شمارنده‌های $2^3 \times 5 \times 7^2$ برابر است با:

$$\text{پاسخ} = (3+1) \times (1+1) \times (2+1) = 24$$

۴ چند عدد طبیعی مختلف می‌توان به جای a و b قرار داد به طوری که:

$$(a \neq b) a^b = b^a$$

$$a = 2, b = 4 \Rightarrow a^b = b^a \Rightarrow 2^4 = 4^2 \Rightarrow 16 = 16$$

$$a = 4, b = 2 \Rightarrow a^b = b^a \Rightarrow 4^2 = 2^4 \Rightarrow 16 = 16$$

۵

کدام یک از عبارت‌های زیر همواره منفی است؟

$$(x \neq 0)$$

پاسخ

۱) $-x$ مثبت می‌شود \rightarrow اگر $x < 0$ باشد \rightarrow در $-x$

۲) $\frac{1}{x^2}$ مثبت می‌شود \rightarrow اگر $x < 0$ یا $x > 0$ باشد \rightarrow در $\frac{1}{x^2}$

۳) $-x^2$ منفی می‌شود \rightarrow اگر $x < 0$ یا $x > 0$ باشد \rightarrow در $-x^2$

۴) $-x^3$ مثبت می‌شود \rightarrow اگر $x < 0$ باشد \rightarrow در $-x^3$

۶ کدام یک از پاسخ‌های زیر به حاصل $11^2 + 9^2$ نزدیک‌تر است؟

$$\left. \begin{array}{l} 11^2 = 121 \\ 9^2 = 81 \end{array} \right\} \Rightarrow 11^2 + 9^2 = 121 + 81$$

حاصل $۸۱ + ۱۲۱$ به حاصل $۸۰ + ۱۲۰$ نزدیک تر است.

۷ از اعداد زیر کدام یک هم مجذور و هم مکعب است؟

مربع ۸ است $\rightarrow ۸^۲ = ۶۴$

مکعب ۴ است $\rightarrow ۴^۳ = ۶۴$

۸ کدام یک از عبارت‌های زیر برابر $a^۳b^۲$ است؟

$$a \times b \times a \times a \times b = a \times a \times a \times b \times b = a^۳ \times b^۲ = a^۳b^۲$$

۹ اگر عدد x عددی بین صفر و یک باشد، کدام گزینه از همه کوچک تر است؟

می‌دانیم اعداد بین صفر تا یک هرچه توانشان بزرگ تر شود، حاصلشان کوچک تر می‌شود پس داریم:

$$x^{۱۰۰۰} < x^{۱۰۰} < x^{۱۰} < x^۱$$

۱۰ نسبت مجذور به مکعب عدد a برابر است با:

$$\frac{a \text{ مجذور} = a^۲}{a \text{ مکعب} = a^۳} \Rightarrow \frac{a \text{ مجذور}}{a \text{ مکعب}} = \frac{a^۲}{a^۳} = \frac{\cancel{a^۲}}{\cancel{a^۲} \times a} = \frac{1}{a}$$

۱۱ کدام یک از گزینه‌ها از بقیه بزرگ تر است؟

$$\left. \begin{array}{l} ۸^۲ = (۲^۳)^۲ = ۲^۶ = ۶۴ \\ ۲^۵ = ۳۲ \\ ۴^۳ = (۲^۲)^۳ = ۲^۶ = ۶۴ \\ ۳^۵ = ۲۴۳ \end{array} \right\} \Rightarrow ۳^۵ \text{ از بقیه بزرگ تر}$$

۱۲ اگر k نشان‌دهنده‌ی عددی منفی باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر، نشان‌دهنده‌ی عددی مثبت است؟

توان‌های زوج علامت پایه را از بین می‌برند. پس $k^۲$ همواره + است.

۱۳ اگر $۰ < a < ۱$ و n عددی زوج و مثبت باشد، کدام عدد از همه بزرگ تر است؟

حل سؤال با فرض یک مثال: فرض کنید داریم $a = -۰٫۳$ و $n = ۲$ داریم:

$$-(-۰٫۳) = +۰٫۳, \quad (-۰٫۳)^{۲+۱} = -۰٫۰۲۷, \quad (-۰٫۳)^{۲-۱} = -۰٫۳, \quad (-۰٫۳)^۲ = ۰٫۰۹$$

مشخص است که $0.9 > 0.3$ می باشد.

۱۴ a^{10} چند برابر $(-a)^{10}$ است؟

می دانیم توان زوج، منفی پایه را از بین می برد بنابراین $(-a)^{10} = a^{10}$ پس نسبت $(-a)^{10} = a^{10}$ برابر است با یک.

۱۵ مقدار عددی کدام عبارت همواره منفی است؟

x^2 همواره مثبت است پس اگر قرینه شود، همواره منفی می شود.

۱۶ اگر $-1 < a < -20$ باشد، کدام عدد از همه بزرگ تر است؟ n عدد طبیعی زوج و a عدد صحیح است.

مثال عددی می زنیم. فرض کنید $a = -3$ و $n = 2$ باشد داریم:

$$\begin{aligned} (-3)^{2-1} &= -3, & (-3)^{2+3} &= -243 \\ -(-3) &= 3, & (-3)^2 &= +9 \end{aligned}$$

۱۷ اگر $a < a^2$ باشد حدود a کدام است؟

اگر $-1 < a < +1$ باشد، توان مثال بالاتر از خود آن کوچکتر هستند ولی چون توان زوج از خود عدد کوچکتر شده، پس a منفی نیست.

۱۸ بین 2^5 و -2^5 چند عدد طبیعی وجود دارد؟

$$-2^5 = -32 < \underbrace{1, 2, 3, \dots, 31}_{31=2^5-1} < 2^5 = 32$$

۱۹ کدام رابطه درست است؟

گزینه ۱ نادرست است زیرا:

$$9 = (-3)^2 \neq -3^2 = -9$$

گزینه ۲ نادرست است زیرا:

$$-1 < 1$$

گزینه ۳ صحیح است زیرا:

$$-\frac{1}{8} > -\frac{1}{2}$$

گزینه ۴ نادرست است زیرا:

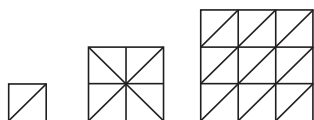
$$\frac{4}{9} < \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

۲۰ سعید در یک ساختمان سه واحدی زندگی می‌کند. در هر واحد ۳ اتاق و در هر اتاق ۳ فرش و روی هر فرش ۳ میز و روی هر میز ۳ سیب قرار دارد. تعداد کل سیب‌ها در این ساختمان چند تا است؟

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 تعداد سیب تعداد میز تعداد فرش تعداد اتاق تعداد واحد

۲۱ تعداد مثلث‌های کوچک (همنهشت) در شکل n ام چند تا است؟



الگوی $2n^2$ صحیح است زیرا:

(۱) شکل $\rightarrow 2 \times 1^2 = 2 \times 1 = 2$

(۲) شکل $\rightarrow 2 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8$

(۳) شکل $\rightarrow 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$

(n) شکل $\rightarrow 2 \times n^2$

۲۲ اگر یک سلول در هر ثانیه به ۵ سلول تقسیم شود. بعد از ۵ ثانیه به چند سلول تقسیم می‌شود؟

سلول ۵ = ثانیه اول

دوم ثانیه $= 5 \times 5 = 5^2$

سوم ثانیه $= 5 \times 5 \times 5 = 5^3$

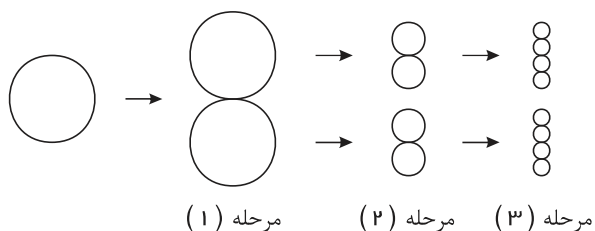
چهارم ثانیه $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

پنجم ثانیه $= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$

۲۳ مکعب کدام یک از اعداد زیر چهار برابر مربعش است؟

$4 \times 16 = 64 = 64 = 64 = 4 \times 16$, مکعب ۴ = ۶۴ , مربع عدد ۴ = ۱۶

۲۴ شکل زیر، تقسیم سلول‌ها را نمایش می‌دهد. در مرحله دهم، چند سلول به وجود می‌آید؟



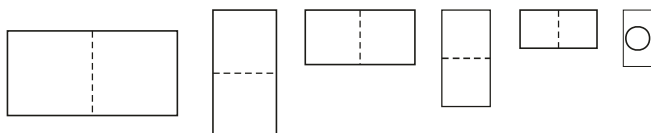
به ترتیب عبارتند از:

مرحله‌ی ۱۰ ، ... ، مرحله‌ی سوم ، مرحله‌ی دوم ، مرحله‌ی ۱
 ↓ ↓ ↓ ↓
 2^{10} ، ... ، 2^3 ، 2^2 ، 2^1

۲۵ شخصی خبری را شنید، او روز بعد، خبر را به ۳ نفر دیگر گفت. این ۳ نفر روز بعد هر کدام خبر را به ۳ نفر دیگر گفتند و به همین ترتیب، این خبررسانی ادامه پیدا کرد. در پایان روز دهم چند نفر باخبر شدند؟

روز دهم روز سوم روز دوم روز اول
 $3 \times 3 \times \dots \times 3$ $3 \times 3 \times 3$ 3×3 3
 ۱۰ بار

۲۶ دیان، یک کاغذ را از وسط تا کرد. سپس کاغذ تا شده را، مجدداً از وسط تا کرده و این کار را ۳ بار دیگر نیز تکرار کرد، پس از آن روی کاغذ تا شده، یک سوراخ ایجاد کرد پس از باز کردن تاهای کاغذ، چند سوراخ دیده می‌شود؟



اگر از تای کاغذ آخر، کاغذ را باز کرده و به عقب برگردیم، تعداد سوراخ‌ها مرحله به مرحله برابر است با:

$3^5 = 3^2 = 3^3 = 8$ ، $3^2 = 4$ ، $3^2 = 2$ سوراخ ، 2 سوراخ → تعداد سوراخ‌ها
 ↓ ↓ ↓ ↓
 باز کردن تای پنجم باز کردن تای سوم باز کردن تای دوم باز کردن یک تا

۲۷ در یک آزمایشگاه، سلول‌ها، هر ۳ ساعت، به ۲ سلول تقسیم می‌شوند. کدام گزینه در مورد تعداد سلول‌ها پس از گذشت یک ماه ۳۰ روزه درست است؟

$$240 \div 3 = 720 \Rightarrow \text{کل ساعات ماه } 24 \times 30 = 720$$

یعنی در مدت یک ماه ۲۴۰ تا ۳ ساعت داریم و چون هر ۳ ساعت سلول‌ها ۲ برابر می‌شوند داریم:

2^{240} ، ... ، 2^3 ، 2^2 ، 2^1 → تعداد سلول‌ها

پس از ۳ ساعت دویست و چهارم و ... و پس از ۳ ساعت سوم و پس از ۳ ساعت دوم و پس از ۳ ساعت اول → گذشت زمان

۲۸ اگر کاغذی به ضخامت ۰٫۳ میلی‌متر از وسط تا کنیم و این کار را ۱۰ بار انجام دهیم، ضخامت به وجود آمده برحسب میلی‌متر، چقدر می‌شود؟

پس از ۱۰ بار تا، 2^{10} کاغذ داریم به ضخامت ۰٫۳ میلی‌متر که روی هم، ضخامت را تشکیل می‌دهند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$2^{10} \times 0.3 = 1024 \times 0.3 = 307.2 \text{ mm}$$

۲۹ عدد بعدی در الگوی ؟ ، ۶۴ ، ۲۷ ، ۸ ، ۱ کدام است؟

$$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3 = 125$$

۳۰ چه عددی را باید به جای «؟» گذاشت؟ ۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ?

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5 = 243$$

۳۱ در دنباله‌ی مختصاتی زیر، به جای \square کدام عدد را باید قرار داد؟

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 64 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 121 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ \square \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 64 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 121 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ 225 \end{bmatrix} \rightarrow \square = 15^2$$

۳۲ یک توپ هر بار که به زمین برخورد می‌کند، به اندازه‌ی ۹۰٪ ارتفاع قبلاش، بالا می‌جهد. اگر این توپ را از ارتفاع a متری به سمت زمین، رها کرده باشیم، کدام الگوی زیر، ارتفاع این توپ را از زمین پس از برخورد n ام، نشان می‌دهد؟

$$a \times \overbrace{\frac{90}{100} \times \frac{90}{100} \times \dots \times \frac{90}{100}}^n = a \times \left(\frac{90}{100}\right)^n$$

۳۳ هیزم‌شکنی در جنگل، چوبی را از وسط می‌شکند. سپس دو قسمت ایجاد شده را روی هم گذاشته و مجدداً از وسط می‌شکند. او این عمل را تکرار می‌کند کدام الگوی زیر، تعداد قطعات ایجاد شده را پس از n امین بار به درستی نشان می‌دهد؟

$$\begin{array}{ccccccc} \text{اولین بار} & \text{دومین بار} & \dots & \dots & \text{امین بار } n & & \\ 2 & 2 \times 2 & & & \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{n \text{ بار}} & & \end{array}$$

۳۴ امیرعلی باید مسافتی را طی می‌کرد. او در دقیقه‌ی اول، $\frac{1}{5}$ مسیر را طی کرد و در هر دقیقه‌ی دیگر، $\frac{1}{5}$ باقی‌مانده‌ی مسیر را طی کرد.

پس از n دقیقه، هنوز a متر باقی‌مانده بود. کل مسیر، چند متر بوده است؟ کدام الگو مناسب این سؤال است؟

در انتهای مسیر، $\frac{4}{5}$ باقی‌مانده است که اگر a متر باقی‌مانده را بر ۴ تقسیم کرده و در ۵ ضرب کنیم، یعنی $a \times \frac{5}{4}$ ، $\frac{4}{5}$ ام‌طی نشده در

مرحله‌ی یکی مانده به آخر به دست می‌آید، اگر همین عمل را تکرار کنیم، کل مسیر به دست می‌آید. یعنی داریم:

$$\underbrace{\left(\dots \left(\left(a \times \frac{5}{4} \right) \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{5}{4} \right) \right)}_{n \text{ مرتبه}} = a \times \left(\frac{5}{4} \right)^n$$

۳۵ اگر روز اول یک ماه ۳۰ روزه، a تومان پس‌انداز کنید و هر روز دیگر، ۲ برابر روز قبل، پس‌انداز کنید، کدام الگوی زیر، فقط پول پس‌انداز شده در روز آخر ماه را محاسبه می‌کند؟

$$\underbrace{2^0 \times a}_{\text{روز اول}}, \underbrace{2^1 \times a}_{\text{روز دوم}}, \underbrace{2^2 \times a}_{\text{روز سوم}}, \dots, \underbrace{2^{29} \times a}_{\text{روز ۳۰ام}}$$

۳۶ باکتری ای به نام A وجود دارد که هر ساعت به ۳ باکتری جدید A تبدیل می‌شود و خودش از بین می‌رود. اگر در ابتدا ۳ باکتری A وجود داشته باشد، پس از ۲۴ ساعت چند باکتری A وجود خواهد داشت؟

در هر ساعت تعداد باکتری‌ها ۳ برابر ساعت قبل می‌شود بنابراین:

$$\begin{aligned} \text{تعداد باکتری‌ها در ساعت اول} &= 3 \times 3 = 3^2 \\ \text{تعداد باکتری‌ها در ساعت دوم} &= 3 \times 3^2 = 3^3 \\ \text{تعداد باکتری‌ها در ساعت سوم} &= 3 \times 3^3 = 3^4 \\ &\vdots \\ \text{تعداد باکتری‌ها در ساعت ۲۴ام} &= 3 \times 3^{24} = 3^{25} \end{aligned}$$

۳۷ بزرگ‌ترین عدد طبیعی n را طوری به دست آورید که $3^{24} > n^{40}$ باشد؟

$$3^{24} > n^{40} \rightarrow (2^5)^{24} > n^{40} \rightarrow 2^{120} > n^{40} \rightarrow (2^3)^{40} > n^{40} \rightarrow 2^3 > n \rightarrow n = 7$$

۳۸ اگر ترتیبی از اعداد ۱ تا ۴ را با a, b, c و d نمایش دهیم به نحوی که $a^b + c^d$ حداکثر مقدار را بدهد، حداکثر مقدار برابر خواهد شد با:

$$3^4 + 2^1 = 81 + 2 = 83$$

۳۹ دنباله ای از اعداد را با شروع از عدد ۱ ایجاد می‌کنیم به این صورت که عدد دوم برابر ۳ باشد و پس از آن هر عدد برابر است با نسبت عدد ماقبل آخر به عدد آخر. عدد دوازدهم برابر است با:

دنباله اعداد به صورت زیر می‌باشد:

$$1, 3, 3^{-1}, 3^2, 3^{-3}, 3^5, 3^{-8}, 3^{13}, 3^{-21}, 3^{34}, 3^{-55}, 3^{89}$$